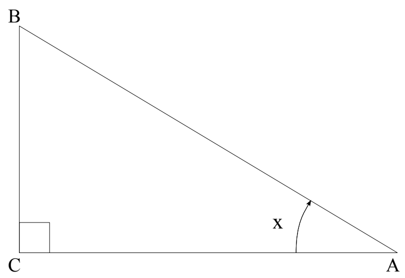
Relations trigonométriques

D.Malka – MPSI 2017-2018 – Lycée Saint-Exupéry

Les relations suivantes sont à connaître sur le bout des doigts dans les deux sens.

Fonctions trigonométriques



$$\cos x = \frac{AC}{AB} \quad \sin x = \frac{BC}{AB} \quad \tan x = \frac{BC}{AC}$$

Formules fondamentales

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Développement des fonctions trigonométriques

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Somme et différence des fonctions trigonométriques

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\cos\left(\tfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p+q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\tfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\tfrac{p-q}{2}\right)$$

Angle double - Angle moitié

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Linéarisation d'un polynôme en cosinus et sinus

Linéariser un polynôme en cosinus et sinus signifie obtenir un développement en cosinus et sinus avec un exposant maximal égal à 1. Voir l'exemple.

Carré

Carré

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

Cas général : formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

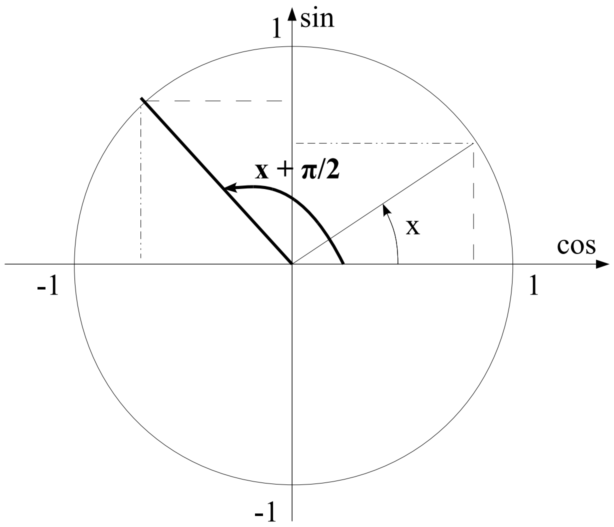
➦ exemple : *linéarisation de $sin^3 x$*

$$\sin x = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$$
$$\Rightarrow \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-e^{-3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

Variations usuelles d'angle

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi+x) = -\cos x$	$\sin(\pi+x) = -\sin x$
$\cos(\pi-x) = -\cos x$	$\sin(\pi-x) = \sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$
$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$

Pour retrouver géométriquement ces relations : le *cercle trigonométrique.*



➦ exemple : *il est clair que* $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$ *et que* $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$.