TD Dimensions & Unités
Corrigé

D1 - Dimensions de qq grandeurs

1/ Force F

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad , \quad \text{souvent} \quad \underbrace{m\vec{a} = \vec{F}}_{\text{homogène}} \Rightarrow [m\vec{a}] = [\vec{F}] \ (*)$$

avec $[m\vec{a}] = [m][a]$

avec $[m] = M$
$[\vec{a}] = L.T^{-2}$ $\Rightarrow$ $[m\vec{a}] = MLT^{-2}$

$(*) \Rightarrow$ $\underline{[\vec{F}] = MLT^{-2}.}$

ou $P = mg \Rightarrow [P] = [mg]$ (avec $[P] = [F]$)
$= [m][g]$

P est une force

accélération

- - - - -

2/ Energie E . $[E]$?

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [E_c] = [\tfrac{1}{2}mv^2]$$

avec $[E_c] = [E]$
$[\frac{1}{2}mv^2] = [\frac{1}{2}][m][v]^2 = \emptyset \times M \times (L.T^{-1})^2$

$\Rightarrow$ $\underline{[E] = ML^2T^{-2}}$

3/ $[R] = ?$ $\quad P = RI^2 \Rightarrow [R] = [P] \times I^{-2}$

or $[P] = \dfrac{[E]}{T}$ et $[E] = ML^2T^{-2}$

d'où $\underline{[R] = ML^2T^{-3}I^{-2}.}$

D2 - Dimension de la constante de Planck

h : cste de Planck
une action

$h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s

Unité de h : J.s $\Longrightarrow$ $[h] = [E] \times T$

avec $[E] = ML^2T^{-2}$

$\Longrightarrow$ $\underline{[h] = ML^2T^{-1}}$

D3 - Homogénéité d'une équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Equation homogène $\Longrightarrow$ $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = \left[D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right]$

$\Longleftrightarrow$ $\frac{\cancel{[\varphi]}}{T} = [D] \frac{\cancel{[\varphi]}}{L^2}$ $\Longleftrightarrow$ $\underline{[D] = L^2 . T^{-1}}$

unité légale : $m^2 . s^{-1}$

D4 - Force de trainée

$F = \frac{1}{2} C A^\alpha \rho^\beta v^\gamma$? $\Longrightarrow$ α, β, γ ?

1./ $[F] = MLT^{-2}$
$[A] = L^2$
$[\rho] = ML^{-3}$
$[v] = L.T^{-1}$

2/ Syst d'eq vérifié par α, β, γ :

$F = \frac{1}{2} C A^\alpha \rho^\beta v^\gamma$

$\Downarrow$ homogène

$[F] = [\frac{1}{2} C A^\alpha \rho^\beta v^\gamma]$

$\Longleftrightarrow$ $[F] = [\frac{1}{2}][C][A]^\alpha [\rho]^\beta [v]^\gamma$

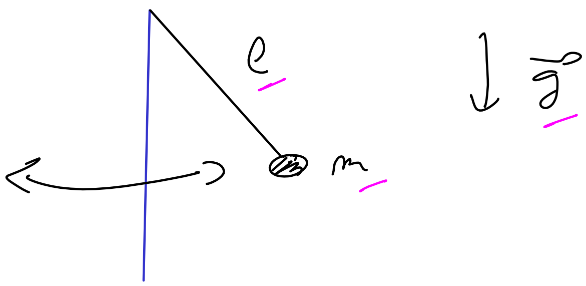
$$\Leftrightarrow M^1 L^1 T^{-2} = \phi \cdot \phi \cdot (L^2)^\alpha \cdot (ML^{-3})^\beta \cdot (L.T^{-1})^\gamma$$
$$= M^\beta . L^{2\alpha - 3\beta + \gamma} . T^{-\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ 2\alpha - 3\beta + \gamma = 1 \\ -\gamma = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 2 \\ \alpha = \frac{1}{2}(1 - \gamma + 3\beta) = \frac{1}{2}(1 - 2 + 3) \end{cases}$$
$$= 1$$

D'où $\boxed{F = \frac{1}{2} C \rho A v^2.}$

D5 - Période d'un pendule

$\omega_0 = ?$



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$[\omega_0] = T^{-1}$

$[m] = M$

$[\ell] = L$

$[g] = L.T^{-2}$

$$\Rightarrow \left[\frac{g}{\ell}\right] = T^{-2}$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right] = T^{-1}$$

On suppose alors que $\omega_0 \propto \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

proportionnel

A.N. : $\omega_0 \sim \sqrt{\frac{10}{1}} \sim 3 \ rad.s^{-1}$

$$T \sim \frac{2\pi}{\omega_0} \sim \frac{6}{3} \sim 2 \ s.$$