TP Info 13 – Résolutions numériques d'équations

D.Malka – MPSI 2015-2016 – Lycée Saint-Exupéry

I1 – Méthode de la sécante

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, s'annulant en $a \in I$, concave ou convexe au voisinage de a. On fixe u_0, $u_1 \in I$ au voisinage de a et on construit $(u_n)_{n\geq 2}$ de la façon suivante : pour tout $n \geq 2$, on définit u_n comme l'abscisse de l'intersection de l'axe des abscisses et de la sécante au graphe de f passant par les points d'abscisses u_{n-1} et u_{n-2}.

1. Faire un dessin illustrant la méthode. Constater qu'il peut y a voir divergence, ou même que que u_n peut ne pas être défini à partir d'un certain rang, mais que si u_1 et u_0 sont assez proches de a, on peut raisonnablement espérer qu'il y ait convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a.
2. Donner une relation liant u_{n-2}, u_{n-1} et u_n.
3. Proposer un test d'arrêt pour la méthode de la sécante.
4. Programmer et tester la méthode de la sécante sur un exemple.

I2 – Point de fonctionnement d'un circuit à diode

On considère un circuit série constitué d'un générateur de force électromotrice égale à $e = 10\,V$, de résistance interne $r = 50\Omega$ monté en série avec une diode dont la loi de fonctionnement est :

$$i(u) = I_s(e^{\frac{u}{V_t}} - 1)$$

avec $I_S = 10^{-14}\,A$ et $V_T = 25\,mV$.

Déterminer le point de fonctionnement du circuit.

I3 – Longueur d'équilibre d'une molécule

On considère le potentiel interatomique $V : r \to V_0\,(1 - \exp\left(-\beta(r - r_0)\right))^2$.

1. Tracer $V(r)$ en fonction de r à l'aide des fonctions du module `matplotlib.pyplot` du langage Python pour $V_0 = 8,3$, $r_0 = 121$ et $\beta = \dfrac{1}{r_0}$.
2. Déterminer la longueur d'équilibre de la molécule.

I4 – Convergence des méthodes numériques

1. Rechercher un zéro de la fonction sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec la méthode de Newton (en initialisant à $\pi/3$) puis avec la méthode dichotomique. Comparer les vitesses de convergence avec la fonction `time()` du module `time()`.
2. Même question en initialisant la méthode de Newton à $\pi/2$.
3. Tester la méthode de Newton sur la fonction $f : x \to \sqrt{x}$. Expliquer le résultat. La méthode dichotomique est-elle applicable ?
4. Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour obtenir p bits significatifs avec la méthode dichotomique ? Avec la méthode de Newton ?