

Cours Info - 15

Matrices

D.Malka

MPSI 2015-2016



Sommaire

- 1 Rappels sur les matrices
- 2 Matrices « maison »
- 3 Matrice numpy : le type array

Sommaire

1 Rappels sur les matrices

2 Matrices « maison »

3 Matrice numpy : le type array

Qu'est-ce qu'une matrice ?

Une matrice en mathématiques, ici (2,3) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Une matrice en mathématiques, ici (n,p) quelconque :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Sommaire

1 Rappels sur les matrices

2 Matrices « maison »

3 Matrice numpy : le type array

Rappel sur les tableaux

Un tableau est une liste en Python (voir cours Info 5).

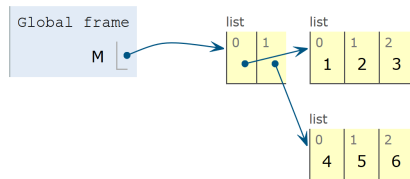
- ▶ **Création** : `T = [1, 2, 5, 9]`
- ▶ **Accès à l'élément i** : `T[i]` (ex `T[2]` vaut 5)
- ▶ **Écriture** : `T[3] = 0` → `T = [1, 2, 5, 0]`
- ▶ **Slicing** : `T[i : j]` renvoie la liste `[T[i], ..., T[j-1]]` (ex `T[0, 2]` renvoie `[1, 2]`)
- ▶ **T contient la référence vers le tableau donc `T1 = T` a pour effet de créer une nouvelle référence vers le même tableau ! Manipuler T ou T1 est alors équivalent.**
- ▶ **Ajout d'un élément en queue** : `T.append(elt)`
- ▶ `[0] * 5` → `[0, 0, 0, 0, 0]`

Implémentation d'une matrice en Python

Créer une matrice

Une matrice est un tableau de tableaux.

Pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$



Création d'une matrice particulière

Pour la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

On écrira :

PYTHON

```
M= [ [1, 2, 3],  
      [4, 5, 6] ]
```

Remarquez la mise en forme qui rend plus clair le contenu de la matrice.

Création générique d'une matrice

Fonction `creer_matrice` renvoyant une matrice quelconque dont les coefficients sont calculés par une fonction f de i et j .

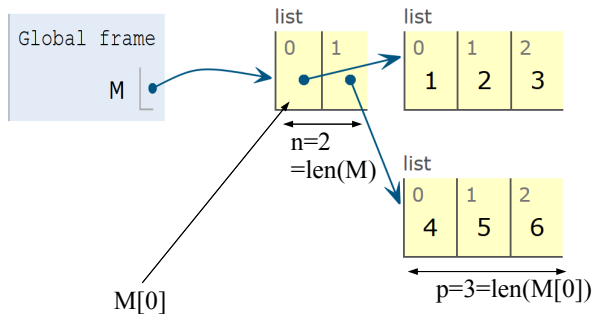
```
1 def creer_matrice(n,p,f):
2     M=[] #M est un tableau de tableaux
3
4     for i in range(n):
5         ligne=[] #ligne a remplir
6         for j in range(p): #remplissage de la ligne i
7             ligne.append(f(i,j))
8         M.append(ligne) #ajout de la ligne i a M
9
10    return M
```

Création générique d'une matrice

Test de la fonction.

```
1 f=lambda i,j:i+j
2 n=4
3 p=5
4 M0=creer_matrice(n,p,f)
```

Dimensions d'une matrice



Accès aux éléments

Accès au coefficient a_{ij} .

$M[i][j]$: en écriture et en lecture !

ex : $M[3][2]=0$ met a_{32} à 0.

Décalage de une unité des indices : en maths i et j commencent à 1, en informatique à 0. Il faut donc avoir une convention clair sur la numérotation (i, j) . Le mieux est de commencer à 0 aussi en maths. En informatique, on n'a pas le choix !

Accès aux éléments

Accès à une ligne → *slicing*

```
Li=M[i][:]
```

Pour la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

`M[1][:]` renvoie `[4, 5, 6]`

`Li=M[i]` ne remplit pas la fonction attendue. Pourquoi ? Car alors `Li` contient la référence vers `[4,5,6]` et non pas une copie de ce tableau ! Si on insère `Li` dans une matrice `M2` alors `M` et `M2` partageront la ligne `Li` ce qui est rarement voulu !

Accès aux éléments

Accès à une colonne : est-ce aussi simple que pour une ligne ?

NON !

```
1 def copie_colonne(M, j):  
2     n=len(M)  
3     c=[]  
4     for i in range(n):  
5         c.append(M[i][j])  
6     return c
```

Copie d'une matrice

On souhaite souvent travailler sur une copie plutôt que de la modifier *in place*.

Comment copier une matrice M ?

$M2=M$? Bonne idée ?

REPONSE EN TD !

Autres opérations

On peut vouloir calculer la trace, le rang, la commatrice, la transposée, l'inverse, le déterminant d'une matrice... ou afficher une matrice ou encore calculer une somme ou un produit de matrice !

Solution 1 : implémenter ces fonctions soit même.

Solution 2 : utiliser des fonctions prédéfinies en ayant bien soin de lire la documentation.

Sommaire

- 1 Rappels sur les matrices
- 2 Matrices « maison »
- 3 Matrice numpy : le type array**

Matrice numpy : le type array

La bibliothèque `numpy` comprend un type `array` permettant de créer des tableaux en mémoire et de réaliser des calculs matriciels. Les éléments ont tous le même type (conversion à la volée si calcul ou modification).

Toutes les opérations usuelles (déterminant, inversion, trace, produit ...) sont déjà implémentés → se référer à la documentation.

Nous voyons dans la suite comment manipuler des objets de type `array`.

Création d'une matrice particulière

Pour la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

On écrira :

PYTHON

```
M=np.array([[1, 2, 3],  
            [4, 5, 6]])
```

Remarquez la mise en forme qui rend plus clair le contenu de la matrice.

Array particuliers

Quelques matrices particulières très utiles !

- ▶ `np.zeros (n , p)` : créé une matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients sont nuls.
- ▶ `np.ones (n , p)` : créé une matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients valent 1.
- ▶ `np.diag (v)` : matrice dont la diagonale est le vecteur v
- ▶ `np.random.rand (n , p)` : matrice dont les coefficients prennent une valeur aléatoire entre 0 et 1. Très utile pour tester des algorithmes matriciels.

Accès à un coefficient

Accès à a_{ij} : `M[i, j]`

PYTHON

```
In [18]: M=np.array([[1,2,3,4],[2,3,4,5],[3,4,5,6],[4,5,6,7],[5,6,7,8]])
```

```
In [19]:M
```

```
Out [19]:
```

```
array([[1, 2, 3, 4],
       [2, 3, 4, 5],
       [3, 4, 5, 6],
       [4, 5, 6, 7],
       [5, 6, 7, 8]])
```

```
In [25]: M[2,2]
```

```
Out [25]: 5
```

Accès à une ligne

Slicing : pour accéder à la ligne $L_i : M[i, :]$.

PYTHON

```
In [18]: M=np.array([[1,2,3,4],[2,3,4,5],[3,4,5,6],[4,5,6,7],[5,6,7,8]])
```

```
In [19]: M
```

```
Out [19]:
```

```
array([[1, 2, 3, 4],
       [2, 3, 4, 5],
       [3, 4, 5, 6],
       [4, 5, 6, 7],
       [5, 6, 7, 8]])
```

```
In [22]: M[1,:]
```

```
Out [22]: array([2, 3, 4, 5])
```

Accès à une colonne

Slicing : pour accéder à la colonne C_j : $M[:, j]$.

PYTHON

```
In [18]: M=np.array([[1,2,3,4],[2,3,4,5],[3,4,5,6],[4,5,6,7],[5,6,7,8]])
```

```
In [19]:M
```

```
Out [19]:
```

```
array([[1, 2, 3, 4],
       [2, 3, 4, 5],
       [3, 4, 5, 6],
       [4, 5, 6, 7],
       [5, 6, 7, 8]])
```

```
In [21]: M[:,3]
```

```
Out [21]: array([4, 5, 6, 7, 8])
```

Extraction d'une sous-matrice de matrice

Slicing : `[k:l,m:n]` renvoie la sous-matrice (a_{ij}) avec $k \leq i < l$ et $m \leq j < n$.

PYTHON

```
In [18]: M=np.array([[1,2,3,4],[2,3,4,5],[3,4,5,6],[4,5,6,7],[5,6,7,8]])
```

```
In [19]:M
```

```
Out [19]:
```

```
array([[1, 2, 3, 4],
       [2, 3, 4, 5],
       [3, 4, 5, 6],
       [4, 5, 6, 7],
       [5, 6, 7, 8]])
```

```
In [24]: M[0:2,2:4]
```

```
Out [24]:
```

```
array([[3, 4],
       [4, 5]])
```


Dimension d'un array

Utiliser l'attribut `shape`

PYTHON

```
In [10]: M=np.ones((4,5))
```

```
In [11]: M
```

```
Out [11]:
```

```
array([[ 1.,  1.,  1.,  1.,  1.],  
       [ 1.,  1.,  1.,  1.,  1.],  
       [ 1.,  1.,  1.,  1.,  1.],  
       [ 1.,  1.,  1.,  1.,  1.]])
```

```
In [12]: M.shape
```

```
Out [12]: (4, 5)
```

Création générique d'une matrice

Idée :

- ▶ **Créer une matrice de taille initialisée à 0 avec `np.zeros`**
- ▶ **Modifier les valeurs des coefficients suivant leurs positions (i,j)**

```
1 def creer_matrice(f,n,p):
2     M=np.zeros((n,p)) #initialisation
3
4     #remplissage
5     for i in range(n):
6         for j in range(p):
7             M[i,j]=f(i,j)
8
9     return M
```

Copie d'une matrice

Slicing intégral ! $M[:, :]$ renvoie une copie de l'intégralité de la matrice

PYTHON

```
In [18]: M=np.array([[1,2,3,4],[2,3,4,5],[3,4,5,6],[4,5,6,7],[5,6,7,8]])
```

```
In [19]:M
```

```
Out [19]:
```

```
array([[1, 2, 3, 4],
       [2, 3, 4, 5],
       [3, 4, 5, 6],
       [4, 5, 6, 7],
       [5, 6, 7, 8]])
```

```
In [26]: M2=M[:, :]
```

```
In [27]: M2
```

```
Out [27]:
```

```
array([[1, 2, 3, 4],
       [2, 3, 4, 5],
       [3, 4, 5, 6],
       [4, 5, 6, 7],
       [5, 6, 7, 8]])
```

Autres opérations

Voir la documentation !