TP Info 15 - Autour des matrices

D.Malka – MPSI 2017-2018 – Lycée Saint-Exupéry

I1 – Matrice d'adjacence

Les graphes sont des objets définies par un ensemble de sommets et d'arc. Ils sont très utilisés pour modéliser et résoudre des problèmes algorithmiquement. On appelle matrice d'adjacence la matrice $n \times n$ où n est le nombre de noeuds du graphe et telle que :

— Les nœuds sont numérotés de 0 à $n-1$.

— S'il existe un arc de i vers j alors $a_{ij} = 1$, 0 sinon.

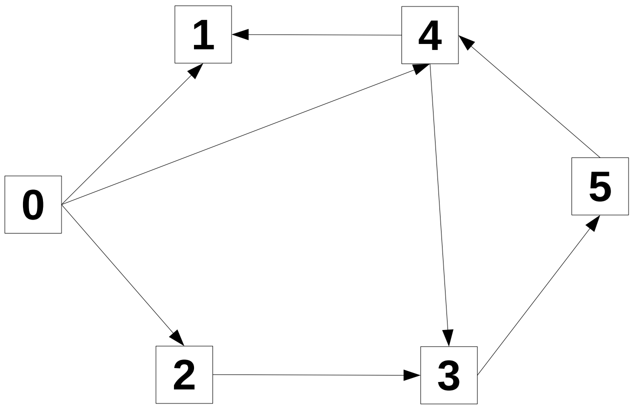

Figure 1 – Un graphe

1. Écrire et mémoriser la matrice d'adjacence du graphe fig.1.
2. Écrire une fonction qui calcule et renvoie la taille d'un graphe c'est-à-dire le nombre d'arcs v du graphe. Que vaut la complexité de cette fonction ?

I2 – Des algorithmes à comprendre

```python
def fonction_2(M,j):
    n=len(M)
    c=[]
    for i in range(n):
        c.append(M[i][j])
    return c
```

```python
def fonction_3(M):
    s=0
    n=len(M)
    p=len(M[0])
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            s+=M[i][j]
    return s
```

I3 – Carré magique !

Un carré magique d'ordre n est composé de n^2 entiers strictement positifs, écrits sous la forme d'un tableau carré. Ces nombres sont disposés de sorte que leurs sommes sur chaque rangée, sur chaque colonne et sur chaque diagonale principale soient égales. On nomme alors constante magique la valeur de ces sommes (fig.2).

Écrire une fonction renvoyant la constante magique d'un carré s'il est magique, `None` s'il n'est pas magique.

I4 – Opérations usuelles sur les matrices

Les algorithmes seront écrits en langage Python.

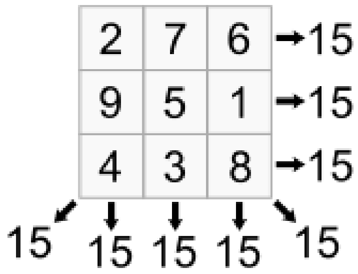

Figure 2 – Un carré magique d'ordre 3 de constante magique égale à 15.

1. Écrire une fonction qui calcule la trace d'une matrice. Quelle est sa complexité ?
2. Écrire une fonction qui calcule le produit de deux matrices. Quelle est sa complexité ?
3. Écrire une fonction qui calcule la transposée d'une matrice. Quelle est sa complexité ?

I5 – Matrice rotation dans le plan

On considère un espace E à deux dimensions. Soit $u(u_0, u_1)$ un vecteur de E. On cherche à calculer les coordonnées du vecteur v résultant de la rotation de u d'un angle θ. On montre que $v = R.v$ où $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice rotation d'angle θ.

1. Écrire une fonction calculant $v = A.u$ pour un vecteur u et une matrice A quelconques.
2. Écrire une fonction qui calcule v résultant de la rotation de v d'un angle θ.
3. Tester la fonction.

I6 – Pour finir amusons-nous !

Coder le jeu du morpion sous forme d'une matrice 3×3 initialement nulle. Les joueurs jouent chacun leur tour. Le joueur 1 remplit la matrice avec des 1, le joueur 2 avec des 2. Les joueurs rentrent à chaque coup les coordonnées d'une case. Le jeu continue tant que personne n'a gagné ou que la matrice n'est pas pleine. Un joueur ne doit pas pouvoir modifier le contenu d'une case pleine. Après chaque coup, l'état courant du jeu doit être affiché.