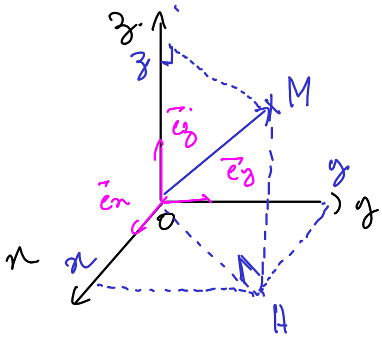
M1. Introduction à la cinématique

I. Cinématique du point

1. Position d'un point

1.1 Base et coordonnées cartésiennes



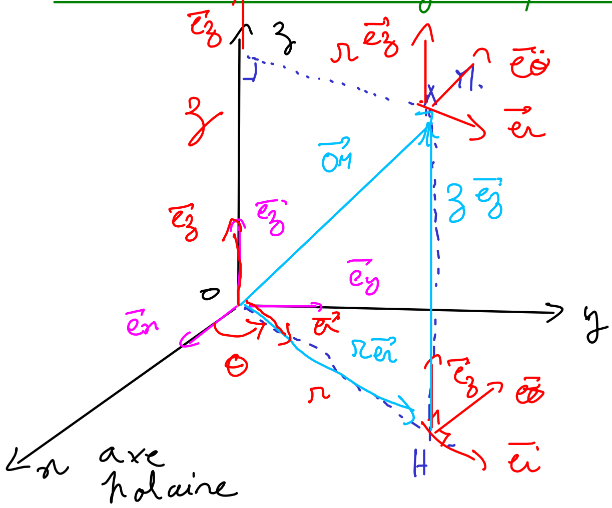
$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})}$

$$\boxed{\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}}$$

Base : $\begin{cases} \|\vec{e_x}\| = \|\vec{e_y}\| = \|\vec{e_z}\| = 1 \\ \vec{e_x} \perp \vec{e_y} \\ \vec{e_z} = \vec{e_x} \wedge \vec{e_y} \end{cases}$

$x \in]-\infty, +\infty[$
$y \in]-\infty, +\infty[$
$z \in]-\infty, +\infty[$

1.2. Base et coordonnées cylindriques (ou polaires 2D)



- Coordonnées cylindriques

$M \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$ $\quad r \in [0, +\infty]$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $\theta = (\vec{e_x}, \vec{e_r})$, $z \in [-\infty, +\infty]$

- Base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

$\vec{e_r} = \dfrac{\vec{OH}}{\|\vec{OH}\|} = \dfrac{\vec{OH}}{r}$

$\vec{e_z} = \vec{e_z}$ des coord cartésiennes

$\vec{e_\theta} = \vec{e_z} \wedge \vec{e_r}$

orthonormée directe.

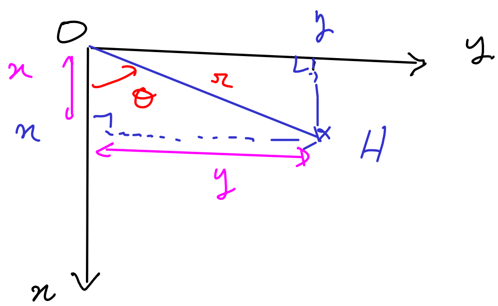
Vecteur position :

$$\boxed{\vec{OM} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}}$$

⚠ dépendance en θ ; dans $\vec{e_r} = \vec{e_r}(\theta)$
$(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ base mobile avec M (avec θ)

Application

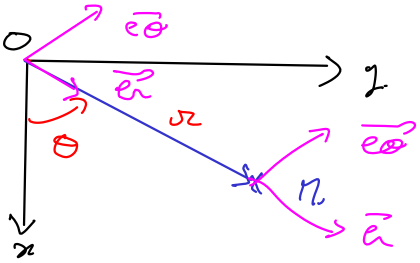
1. (x, y, z) en fonction de (r, θ, z)
2. (r, θ, z) en fonction de (x, y, z)



(1) $\cos\theta = \dfrac{x}{r} \Leftrightarrow x = r\cos\theta$
$\sin\theta = \dfrac{y}{r} \Leftrightarrow y = r\sin\theta$
$z = z$

(2) $r^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
$z = z$.

Rem : $z = 0$, $M \in$ plan Oxy : base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

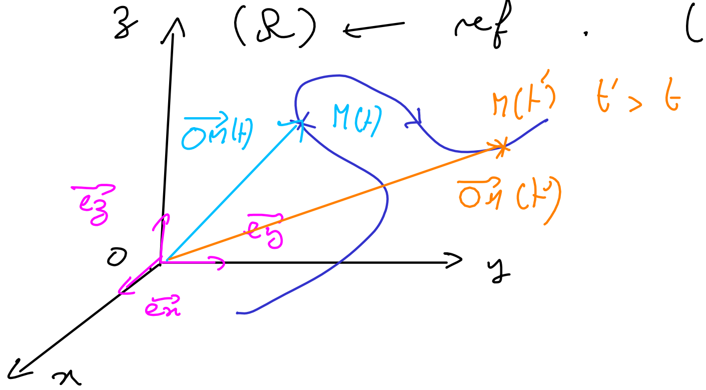


1.3. Comment choisir la base et le système de coordonnées

- Par défaut : base et coord. cartésiennes
- Si symétrie cylindrique (ex : mvt circulaire) : base et coord cylindrique.

2. Trajectoire, vitesse, accélération d'un point.

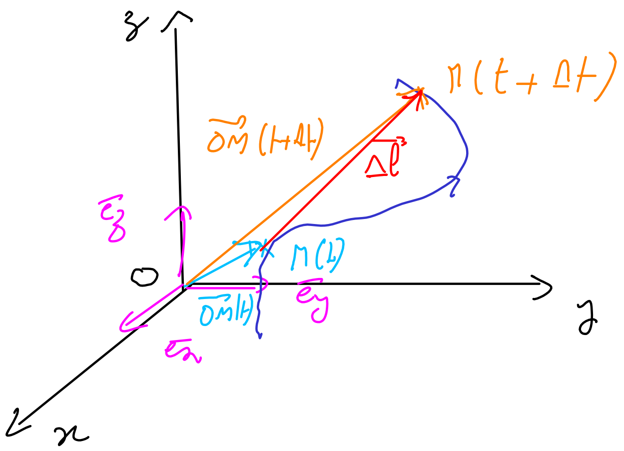
2.1. Trajectoire dans un référentiel donné



Trajectoire de M ds $\mathcal{R}$: ensemble des positions prise par M au cours du temps.

2.2. Déplacement élémentaire.

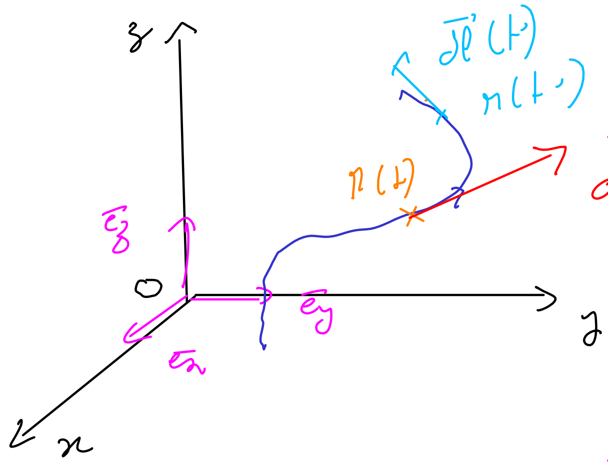
2.2.1. Définition



$\vec{OM}(t+\Delta t) - \vec{OM}(t) = \vec{M(t)M(t+\Delta t)}$
$= \Delta\vec{OM} \qquad = \vec{\Delta l}$
Vecteur déplacement.

Déplacement de M pdt dt infiniment petit = déplacement élémentaire.

$$\boxed{d\vec{OM} = \vec{dl} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\vec{OM}(t+\Delta t) - \vec{OM}(t)\right)}$$



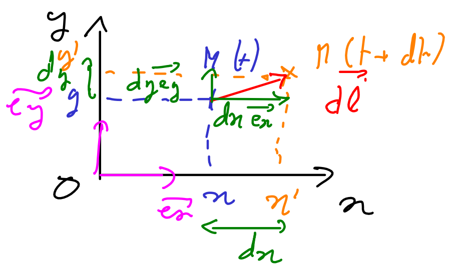
$\vec{dl}(t)$ tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de la trajectoire

2.2.2. Expression dans la base cartésienne

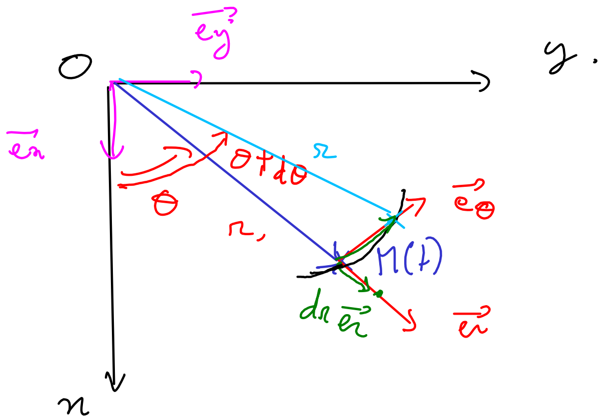
$$M(t)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow M(t+dt)\begin{pmatrix} x+dx \\ y+dy \\ z+dz \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{dl} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}}$$

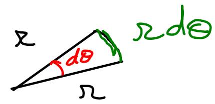
<u>En à 2D</u> :



2.2.3. Expression dans la base cylindrique.



$$M(t) = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \qquad M(t+dt)\begin{pmatrix} r+dr \\ \theta+d\theta \\ z+dz \end{pmatrix}$$



A z et θ fixés : $r \longrightarrow r + dr \Rightarrow \vec{dl}_1 = dr\,\vec{e_r}$

A z et r fixés : $\theta \longrightarrow \theta + d\theta \Rightarrow \vec{dl}_2 = r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

A r et θ fixés : $z \longrightarrow z + dz = \vec{dl}_3 = dz\,\vec{e_z}$

$$\boxed{\vec{dl} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}}$$

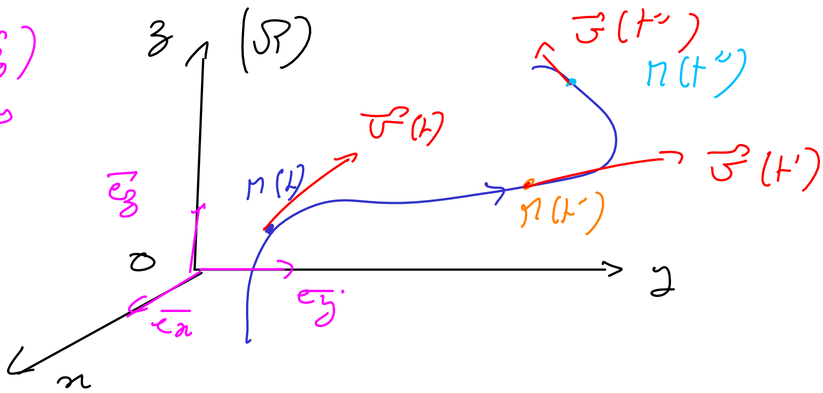
2.3. Vitesse instantanée d'un point dans un réf donné

2.3.1. Définition

$$\vec{v}(M,t)\Big|_{\mathcal{R}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{OM}(t+\Delta t) - \vec{OM}(t)}{\Delta t}$$

soit $$\boxed{\vec{v}(M,t)\Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\,\vec{OM}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}}}$$

$(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ fixe dans $\mathcal{R}$!



2.3.2. Expression en coord cartésiennes

Méthode 1 : dériver $\vec{OM}$ .....

Méthode 2 : déplacement / dt

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\vec{v}(M,t)\Big|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_z}}$$

2.3.2. Expression en coord cylindrique :

Méthode 2 : déplacement / dt

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{v}(M,t)\Big|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}}$$

Méthode 1 : dériver $\vec{OM} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}$ par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}\left(r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}\right)$$

$$= \dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\underbrace{\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}_{?} + \dot{z}\,\vec{e_z} + z\,\underbrace{\cancel{\frac{d\vec{e_z}}{dt}}}_{0}\Big|_{\mathcal{R}}$$

car $\vec{e_z}$ fixe dans $\mathcal{R}$

$$\vec{e_r} = \cos\theta(t)\,\vec{e_x} + \sin\theta(t)\,\vec{e_y}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta)\,\vec{e_x} + \frac{d}{dt}(\sin\theta)\,\vec{e_y}$$

$$= -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e_x} + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_y}$$

$$= \dot{\theta}\,\underbrace{\left(-\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y}\right)}_{\vec{e_\theta}}$$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}}$$

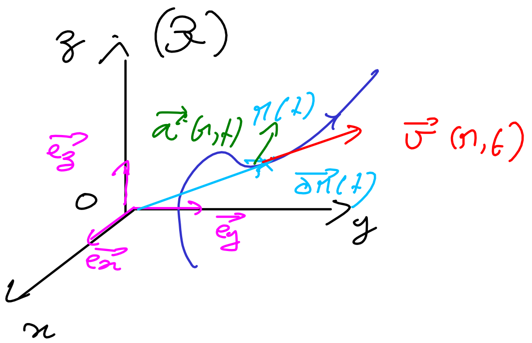
D'où

$$\boxed{\vec{v}(M,t)\big|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}}$$

2.4 Accélération d'un point dans un référentiel donné

2.4.1. Définition

$(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ fixe dans $\mathcal{R}$



Accélération = variation de vitesse par unité de temps.

$$\boxed{\vec{a}(M,t)\big|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}(M,t)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}}}$$

2.4.2. Expression en coordonnées cartésiennes

$$\vec{v}(M,t) = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M,t)\big|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \dot{x}\,\underbrace{\cancel{\frac{d\vec{e_x}}{dt}}}_{0}$$
$$+ \ddot{y}\,\vec{e_y} + \dot{y}\,\underbrace{\cancel{\frac{d\vec{e_y}}{dt}}}_{0}$$
$$+ \ddot{z}\,\vec{e_z} + \dot{z}\,\underbrace{\cancel{\frac{d\vec{e_z}}{dt}}}_{0}$$

$(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ fixe ds $\mathcal{R}$

$$\boxed{\vec{a}(M,t)\big|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \ddot{z}\,\vec{e_z}}$$

2.4.2. Expression en coordonnées cylindrique.

Préliminaire : $\left.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = ?$

① Exprimer $\vec{e_\theta}$ dans une base fixe / $\mathcal{R}$; ici $\mathcal{R}(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

$$\vec{e_\theta} = -\sin\theta(t)\,\vec{e_x} + \cos\theta(t)\,\vec{e_y}$$

② Dériver.

$$\left.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -\dot\theta(t)\cos\theta(t)\,\vec{e_x} - \sin\theta \cancel{\left.\frac{d\vec{e_x}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}^{\,0}$$

$$\dot\theta(t) \times -\sin\theta(t)\,\vec{e_y} + \cos\theta \cancel{\left.\frac{d\vec{e_y}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}^{\,0}$$

$$= -\dot\theta\,(\underbrace{\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}}_{\vec{e_r}})$$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -\dot\theta\,\vec{e_r}}$$

$$\vec{v}(M,t)|_{\mathcal{R}} = \dot r\,\vec{e_r} + r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + \dot z\,\vec{e_z}$$

$$\vec{a}(M,t)|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d}{dt}(\dot r\,\vec{e_r})\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d}{dt}(r\dot\theta\,\vec{e_\theta})\right|_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt}(\dot z\,\vec{e_z})$$

$$= \ddot r\,\vec{e_r} + \dot r \underbrace{\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}_{\dot\theta\,\vec{e_\theta}}$$

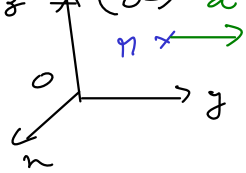
$$+ \dot r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + r\ddot\theta\,\vec{e_\theta} + r\dot\theta \underbrace{\left.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}_{-\dot\theta\,\vec{e_r}}$$

$$+ \ddot z\,\vec{e_z} + \dot z \cancel{\left.\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}}^{\,0} \quad \vec{e_z} \text{ fixe} / \mathcal{R}$$

$$\boxed{\vec{a}(M,t)|_{\mathcal{R}} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\vec{e_r} + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\vec{e_\theta} + \ddot z\,\vec{e_z}}$$

3. Etude cinématique de quelques mouvements simples

3.1. Mouvement uniformément accélérée.



(Ω) $\vec{a} = a\,\vec{e_y}$, $a = \text{cste}$. $y(t)$? $\vec{a} = \ddot y\,\vec{e_y}$

à $t = 0$: $y = 0$, $v = 0$

$\Rightarrow \ddot y = a$

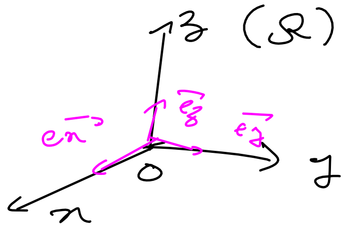
$\Rightarrow \dot y(t) = at + \alpha$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}at^2 + \alpha t + \beta$, $t > 0$

Continuité de y et $\dot y$ à $t = 0$: $\begin{cases} y(0^+) = y(0^-) \\ \dot y(0^+) = \dot y(0^-) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

d'où $\boxed{y(t) = \frac{1}{2}at^2.}$

3.2. Mouvement rectiligne sinusoïdal



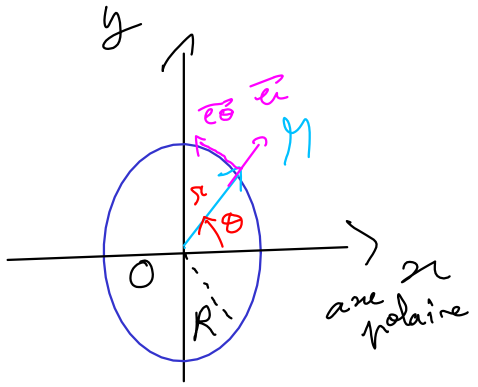
$$M\begin{pmatrix} x(t) = a\cos\omega t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{pmatrix}$$

Vitesse ? Accélération ?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})} = \begin{pmatrix} -\overbrace{a}^{L}\,\overbrace{\omega}^{T^{-1}} \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})} = \begin{pmatrix} -\overbrace{a}^{L}\,\overbrace{\omega^2}^{T^{-2}} \cos\omega t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3. Mouvement circulaire uniforme



Mouvement circulaire uniforme à la vitesse angulaire ω.

Mq : $a(t) = + \frac{v^2(t)}{R}$ dans la base polaire ! (normes.)

mvt plan.

① $\vec{v} = \underbrace{\cancel{\dot{r}\,\vec{e_r}}}_{r \overset{\circ}{=} R} + \underbrace{r}_{R}\,\underbrace{\dot{\theta}}_{\text{vitesse angulaire}}\,\vec{e_\theta} + \cancel{\dot{z}\,\vec{e_z}} \Rightarrow \vec{v} = R\omega\,\vec{e_\theta}$

$\dot{\theta} = \omega$

$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \underline{v = R\omega}$

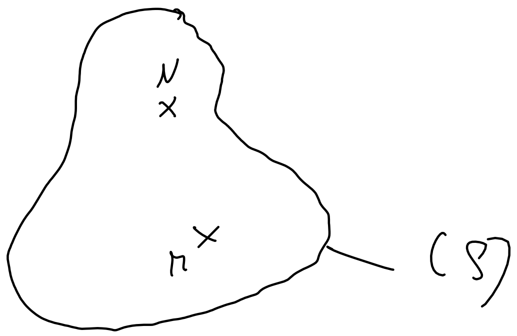
② $\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = R\omega \underbrace{\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}}_{-\dot{\theta}\,\vec{e_r} \,=\, -\omega\,\vec{e_r}} \Leftrightarrow \vec{a} = -R\omega^2\,\vec{e_r}$

$\Rightarrow \|\vec{a}\| = \underline{a = R\omega^2}$

③ $a = \frac{v^2}{R}$

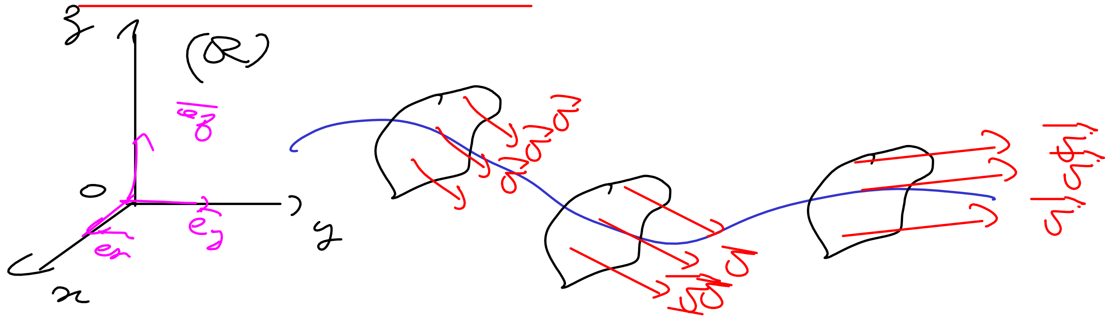
II. Brève introduction à la cinématique du solide

1. Modèle du solide indéformable



(S) indéformable :
$\forall (M, N) \in (S)$:
$MN(t) = \text{cste}$

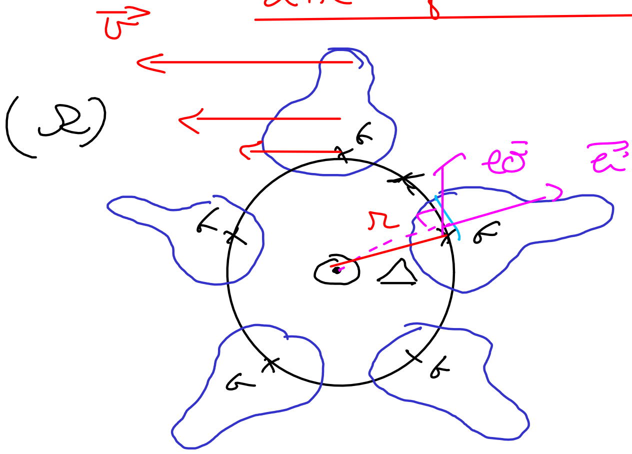
2. Mvt de translation



Mvt de translation : $\forall M \in (S)$, $\vec{v}(M, t) = \text{cste}$
Champ de vitesse de (S) uniforme.

Voc : trajectoire d'un pt qcq de (S) est :
- une droite : translation rectiligne
- cercle : translation circulaire.

3. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe ds R.



Mvt de rotation de (S) autour de l'axe Δ fixe dans (R) : tout point $M \in (S)$ décrit un cercle $\in$ plan $\perp$ à Δ et de centre $O \in \Delta$.

Champ de vitesse :
$\vec{v}(M) = r\,\omega\,\vec{e_\theta}$
avec $\omega = \omega(t)$ vitesse angulaire
et r : distance de M à Δ

Rem : $\forall M$, $\omega(M) = \text{cte}$