Cours M2 – Dynamique du point matériel en référentiel galiléen

D.Malka – MPSI – 2012-2013 – Lycée Saint-Exupéry

Introduction

Dans ce cours, nous nous posons la question suivante : comment expliquer et prédire le mouvement d'un projectile tiré à la surface de la Terre ?

1 Qu'est-ce qu'un point matériel ?

1.1 Le point matériel

Un point matériel est un point géométrique doué d'une masse inertielle.

1.2 Masse inertielle

La *masse inertielle* m est un scalaire positif traduisant la répugnance d'un corps à voir son mouvement modifié.

1.3 Quantité de mouvement

On appelle quantité de mouvement du point matériel $M(m)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$:

$$\vec{p}|_{\mathcal{R}} = m\vec{v}|_{\mathcal{R}}$$

1.4 Exemples de points matériels

Quelques exemples de systèmes modélisables par un point matériel :

- une particule élémentaire ;
- une étoile lointaine dont on néglige le mouvement propre ;
- le centre de masse d'un système, doué de la masse totale du système, est l'archétype du point matériel.

2 Qu'est-ce q'une action mécanique ? Modélisation par une force

2.1 Qu'est-ce qu'une d'une action mécanique ?

On appelle action mécanique de A sur B une action d'un système A sur un autre système B dont l'effet, en l'absence de toute autre action, est une modification du mouvement ou une déformation du système B.

2.2 Modélisation d'une action mécanique par une force

En mécanique classique, une action mécanique est caractérisée par une direction, un sens, une intensité et un point d'application. On la modélise par un vecteur-force (ou une force) lié au point d'application.

2.3 Système isolé

Un système soumis à aucune force extérieure est dit mécaniquement isolé.

Si la résultante et le moment des forces extérieures qui s'appliquent au système sont nuls alors le système est dit *pseudo-isolé*.

3 Quelques forces usuelles

3.1 Forces à distance

3.1.1 Attraction gravitationnelle et poids

Attraction gravitationnelle

Voir schéma Fig.1.

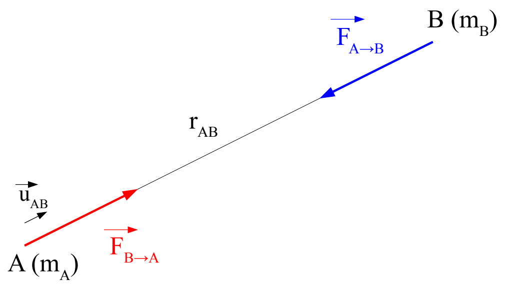

Figure 1 – Attraction gravitationnelle

Soit deux points matériels $A(m_A)$ [1] et $B(m_B)$ distants de $r_{AB} = AB$. Le point A exerce sur le point B la force d'attraction gravitationnelle [1] :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\to B} = -G\frac{m_A m_B}{r_{AB}^2}\vec{u}_{AB}}$$

$G \approx 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$ est la constante de gravitation universelle

$\vec{u}_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ vecteur unitaire défini par $\overrightarrow{AB}$

A et B jouant des rôles symétriques, on montre facilement que $\overrightarrow{F}_{B\to A} = -\overrightarrow{F}_{A\to B}$.

1. La masse intervenant dans la loi de gravitation est appelée masse *grave* n'a, a priori, aucun lien avec la masse *inertielle*. On admet l'identité de ces deux masses.

Poids

A la surface de la Terre, un point matériel M de masse m subit la force $\overrightarrow{P}$ appelé *Poids* :

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m\vec{g}}$$

où $\vec{g}$ est la pesanteur locale.

Application 1 – En première approximation, on peut confondre le poids et l'attraction gravitationnelle à la surface de la Terre. On note R_T le rayon moyen la Terre, M_T sa masse et h l'altitude du point $M(m)$. Montrer alors, qu'à la surface de la Terre, la pesanteur g vaut :

$$g = G\frac{M_T}{(R_T)^2}$$

3.1.2 Force de Coulomb

Voir schéma Fig.2.

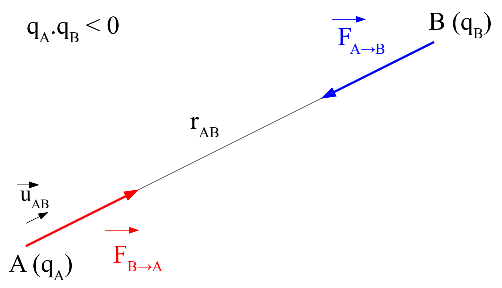

Figure 2 – Force de Coulomb

Soit deux charges ponctuelles $A(q_A)$ et $B(q_B)$, placées dans le vide, distantes de $r_{AB} = AB$. La charge A exerce sur la charge B la force de Coulomb :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\to B} = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_{AB}^2}\vec{u}_{AB}}$$

ε_0 est une constante appelée permittivité électrique du vide :
$\varepsilon_0 \approx 8,85.10^{-12} F.m^{-1}$

A et B jouant des rôles symétriques, on montre facilement que $\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$.

3.2 Forces de contact

3.2.1 Tension d'un fil

Voir schéma Fig.3.

Hypothèses :
- fil inélastique ;
- fil sans masse ;
- fil toujours tendu.

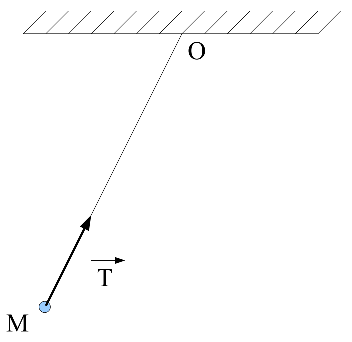

Figure 3 – Tension d'un fil inélastique

La tension d'un fil tendu est colinéaire au fil et orienté vers l'extrémité fixe du fil [2].

3.2.2 Force de rappel d'un ressort

Soit un ressort d'extrémité fixe O et d'extrémité M mobile. Voir schéma Fig.4.

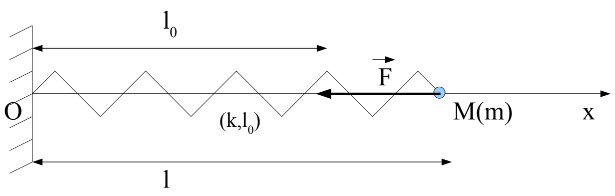

Figure 4 – Force de rappel d'un ressort linéaire

Si la déformation du ressort est suffisamment faible, le point M subit la force :

$$\boxed{\vec{F} = -k\Delta l\vec{e}_x = -k(l-l_0)\vec{e}_x}$$

où k est la raideur du ressort, l sa longueur et l_0 sa longueur à vide.

Rem : *attention ! l'expression précédente n'est valable que si* $\overrightarrow{OM}$ *et* $\vec{e}_x$ *ont même sens. Dans le cas contraire* $\vec{F} = +k\Delta l\vec{e}_x = +k(l-l_0)\vec{e}_x$

Application 2 – On considère une masse ponctuelle $M(m)$ suspendue verticalement à un ressort (raideur k, longueur à vide l_0) dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On repère l'altitude z du point M par rapport à O, extrémité fixe du ressort dans le référentiel d'étude. Déterminer la position z_{eq} du point M à l'équilibre.

Réponse : $z_{eq} = l_0 + \dfrac{mg}{k}$

2. Avec les hypothèses considérées, on montre que la tension du fil est identique en tout point du fil.

3.2.3 Force de contact avec un solide

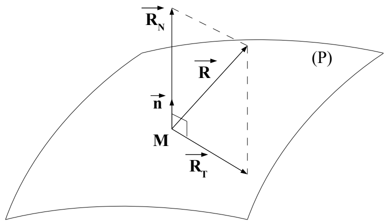

FIGURE 5 – Le frottement solide

Tant que le point matériel M et la surface (S) solide sont en contact, cette dernière exerce sur M une force de contact $\vec{R}$ qu'on décompose en deux composantes : la composante normale $\vec{R}_N$ portée par le vecteur $\vec{n}$ normal à la surface en M, et la composante tangentielle $\vec{R}_T$ appartenant au plan tangent à la surface en (P) : $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$

A priori, $\vec{R}_N$ et $\vec{R}_T$ sont des inconnues du problème. Pour le résoudre, on peut être amené à utiliser des lois empiriques telles que les lois du frottement de Coulomb succinctement exposées ci-dessous.

A l'équilibre

Tant que le point M est en équilibre :

$$\begin{cases} \dfrac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} < f \\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Réciproquement, si M est en équilibre, les relations ci-dessus sont vérifiées.

f est appelé *coefficient statique de frottement de glissement*. Sa valeur, déterminée expérimentalement, dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact.

S'il y a glissement

Tant que le point M glisse sur la surface (S) :

$$\vec{R}_T = -f_c\|\vec{R}_N\| \frac{\vec{v}(M)}{v(M)}$$

Réciproquement, si la relation ci-dessus est vérifiée, le point M glisse.

avec f_c le coefficient dynamique de frottement de glissement.

En général, $f_c < f$ [3] et il est donc plus facile de maintenir le point M en mouvement que de le mettre en mouvement.

Application 3 – Soit un objet de masse m, assimilée à un point matériel de masse M, reposant sur un sol horizontal. on note le coefficient de frottement statique entre l'objet et le sol. Quelle est l'intensité minimale de la force $\vec{F}$ qu'il faut exercer pour mettre l'objet en mouvement suivant $\vec{e}_x$?

Réponse : $F \geq fmg$

3.2.4 Frottements fluides

Soit un point matériel $M(m)$ se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un fluide. Alors la résultante $\vec{f}$ des forces qu'exercent le fluide sur le point M peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{f} = -\lambda v^\alpha \frac{\vec{v}}{v}}$$

avec λ constante positive et α un nombre réel positif déterminé empiriquement [4].

Si le projectile se déplace suffisamment lent, la force de frottement fluide peut s'écrire : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

3. On confondra souvent les deux coefficients de frottement : $f_c \approx f$
4. Sans prendre en compte la poussée d'Archimède qui n'est rigoureusement valable qu'en statique.

4 Les lois de Newton

4.1 Principe d'inertie et référentiels galiléens

Il existe des *référentiels galiléens* dans lesquels le centre de masse [5] d'un système soumis à aucune force est en mouvement rectiligne uniforme.

4.2 Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soit un point matériel $M(m)$ de vitesse $\vec{v}$ soumis à des forces de résultantes $\overrightarrow{F}$, alors :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{p}(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F}}$$

4.3 Principe des actions réciproques [6]

Soit deux points matériels A et B en interaction alors :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\overrightarrow{F}_{B\to A}}$$

5 Résolution-type de l'équation du mouvement : tir d'un projectile dans l'air

Dans ce paragraphe, nous donnons un modèle de résolution d'un problème de mécanique sur le modèle du tir d'un projectile à la surface de la Terre. Le projectile est tiré avec une vitesse initiale $\vec{v}_0\ (v_0 \cos\alpha), v_0 \sin\alpha, 0)$.

5. Ici le centre de masse se confond évidemment avec le point matériel lui-même.
6. Ce principe repose sur la propagation instantanée des interactions infirmé par la théorie de la relativité.

5.1 Définition du système étudié

Système : projectile assimilé à un point matériel M de masse m.

5.2 Choix du référentiel d'étude

Toujours définir rigoureusement le référentiel dans lequel sera effectué l'étude. Prendre garde à ne pas changer implicitement de référentiel durant l'étude.

Référentiel : terrestre $\mathcal{R}_T$, supposé galiléen.

5.3 Bilan des forces s'exerçant sur le système

Bilan des forces s'exerçant sur M dans $\mathcal{R}_T$:

1. Poids $\overrightarrow{P}$;
2. Poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$, négligée pour alléger les calculs ;
3. frottements fluides $\vec{f}$.

Choisir une base de travail et projeter les forces sur les vecteurs de cette base : ici la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

5.4 Application de la relation fondamentale de la dynamique : équation du mouvement

1. écrire la relation fondamentale de la dynamique ;
2. projeter les forces et l'accélération du point M sur cette base.

   On obtient des équations différentielles sur les coordonnées de M : ce sont les équations du mouvement : voir paragraphe suivant.

5.5 Résolution de l'équation du mouvement

Il faut intégrer les équations du mouvements et utiliser les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

5.5.1 En négligeant les frottements : chute libre

On prend $\vec{f} = \overrightarrow{0}$.

Equations du mouvement

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Résolution

Après intégration, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) = v_0\sin(\alpha)t - \dfrac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Analyse du mouvement

La trajectoire est une parabole d'équation cartésienne $y(x) = (\tan\alpha)x - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2$ (Fig.6)

FIGURE 6 – Trajectoire d'un projectile sans frottement fluide

La portée est donnée par $y(x_p) = 0$ et vaut $x_p = \dfrac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$. A v_0 constante, elle est maximale pour $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (Fig.7). La flêche est donnée par $y_f = y(t_f)$ avec $\dot{y}(t_f) = 0$; on trouve $y_f = \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2(\alpha)$

FIGURE 7 – Influence de la vitesse initiale sur la trajectoire

5.5.2 Prise en compte des frottements pour un projectile lent

Pour un projectile lent, la force de frottement fluide s'écrit : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

Equations du mouvement

En posant $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{x}{\tau} \\ \ddot{y} = -g - \dfrac{x}{\tau} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Résolution

Pour la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0\cos(\alpha)e^{\frac{-t}{\tau}} \\ \dot{y} = -g\tau + (g\tau + v_0\sin(\alpha))e^{\frac{-t}{\tau}} \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Au bout de quelques τ, le projectile atteint la vitesse limite $\vec{v}_{lim} = -g\tau\vec{e}_y$. LA trajectoire est limitée par une asymptote verticale. La portée n'est plus maximale pour $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (Fig.8).

FIGURE 8 – Trajectoire d'un projectile lent avec frottement fluide

Pour la position :

$$\begin{cases} x(t) = v_0\tau\cos(\alpha)(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \\ y(t) = -g\tau t + (g\tau + v_0\sin(\alpha))(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

La flêche reste calculable analytiquement, pas la portée dont l'équation doit être résolu numériquement.

Application 4 – Déterminer la flêche y_f et l'équation vérifiée par la portée x_p.

5.5.3 Projectile à grande vitesse

Pour un projectile à grande vitesse, l'exposant α de la loi phénoménologique du frottement fluide est supérieur à 1. Les équations ne sont plus solubles analytiquement. On procède à une résolution numérique approchée à l'aide d'un logiciel de calcul tel que MAPLE.