



# TD M6 – MOUVEMENT DANS CHAMP DE FORCE NEWTONIEN

D.Malka – MPSI 2016-2017 – Lycée Saint-Exupéry

## Données générales

- constante de gravitation universelle  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ ,
- période de rotation propre de la Terre (jour sidéral)  $J_s = 86164 \text{ s}$ .

Astre	Masse (kg)	Rayon moyen (m)	Demi-grand axe (m)
Soleil	$1,99 \cdot 10^{30}$	$6,96 \cdot 10^8$	x
Terre	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,37 \cdot 10^6$	$1,50 \cdot 10^{11}$
Lune	$7,35 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$	$3,844 \cdot 10^8$

On suppose que les astres présentent une répartition sphérique de masse.

## M1 – Satellite géostationnaire

### 1. Corps en orbite circulaire

1.1 A partir de l'expression de l'énergie mécanique, montrer que la vitesse d'un corps (de masse  $m$ ) en orbite circulaire de rayon  $r_0$  autour d'un astre attracteur (de masse  $M$ ) vaut :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

1.2 Enoncer la 3<sup>ème</sup> loi de Képler et la démontrer dans le cas du mouvement circulaire.

### 2. Satellite en orbite géostationnaire.

On appelle satellite géostationnaire un satellite survolant à chaque instant le même point de la Terre.

2.1 Dans quel plan la trajectoire d'un satellite géostationnaire est-elle nécessairement comprise ?

2.2 Calculer l'altitude  $h$  d'un satellite géostationnaire. Commenter. Application numérique.

## M2 – Trajectoire d'une comète

La Terre décrit autour du Soleil (de centre  $S$ ) une orbite quasiment circulaire de rayon  $r_0 = 1,5 \times 10^8 \text{ km}$  à la vitesse moyenne  $v_T = 30 \text{ km.s}^{-1}$ .

Une comète  $C$  passe extrêmement près du Soleil : distance au périhélie  $r_p = \alpha r_0$  avec  $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ .

Des mesures précises ont montré que la trajectoire de la comète est une ellipse de grande excentricité  $e$ . On pose  $e = 1 - x$  avec  $x = 10^{-4}$ .

On redonne l'équation polaire d'une ellipse d'excentricité  $e$  et de paramètre  $p$  :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad \text{avec } 0 < e < 1$$

1. Calculer la vitesse maximale  $v_{max}$  de la comète en supposant sa trajectoire parabolique.
2. Représenter la trajectoire en faisant figurer l'aphélie  $A$  et le périhélie  $P$  ainsi que les distances  $r_p = SP$  et  $r_a = SA$ .
3. Jusqu'à quelle distance  $r_a$  la comète va-t-elle s'éloigner du Soleil ? Evaluer sa vitesse  $v_a$  à cette distance.
4. Quelle durée  $\tau$  la comète met-elle pour atteindre cette position extrême depuis le périhélie ?

## M3 – Trou noir « classique »

On appelle horizon d'un trou noir la distance au trou noir en deçà de laquelle aucun corps ne peut échapper à l'attraction du trou noir c'est-à-dire en deçà de laquelle la vitesse de libération devient supérieure à la célérité de la lumière  $c$

dans le vide. C'est un concept de relativité générale. Nous en proposons ici une approche classique.

1. Expliquer la dénomination « trou noir » d'un corps possédant un tel horizon.
2. Si le Soleil, à sa mort, venait à devenir un trou noir<sup>1</sup>, quel serait son horizon ?
3. Minorer alors la masse volumique de ce trou noir. Commenter.

## M4 – Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

### 1. Modèle planétaire

L'expérience de Rutherford a mis en défaut le modèle de Thomson de l'atome. Le premier propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène : il est constitué d'un électron (masse  $m$ , charge  $-e$ ) en orbite circulaire de rayon  $r$  autour d'un proton  $P$  (charge  $+e$ ) supposé fixe dans le référentiel d'étude (voir Fig.1). A cette échelle, la force de gravitation est négligeable.

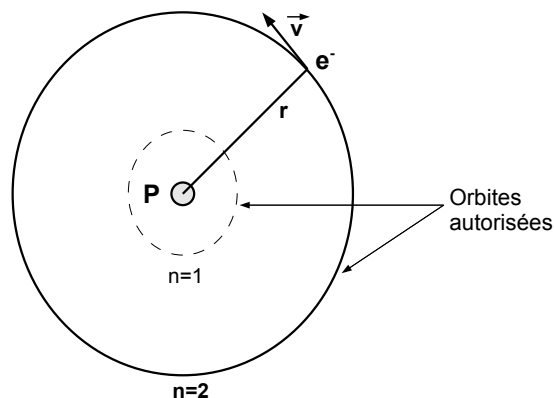


FIGURE 1 – Modèle de Bohr de l'atome H

1. On sait qu'en fait, il deviendra une naine blanche

Données :  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$ , célérité de la lumière dans le vide  $c = 2,99 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , masse de l'électron  $m = 9,0 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , définition de l'électron-Volt :  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

- 1.1 Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle associée à l'atome.
- 1.2 Exprimer alors l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon de l'orbite  $r$ .  
*L'électron étant en accélération, classiquement il doit céder de l'énergie par rayonnement.*
- 1.3 Dans le modèle planétaire, la trajectoire de l'électron peut-elle rester circulaire ? Cet atome est-il théoriquement stable ?

### 2. Modèle de Bohr

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons  $r_n$  telles que le moment cinétique est quantifié :

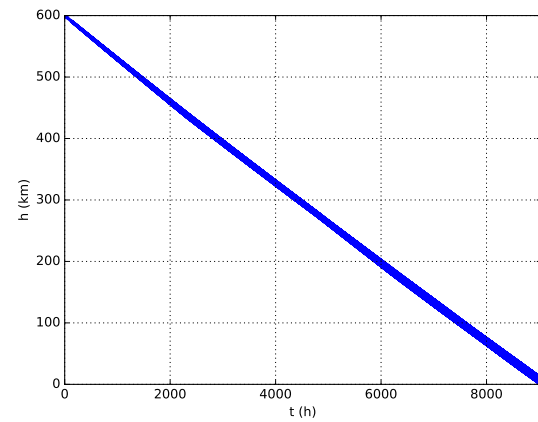
$L_P(n) = n \frac{h}{2\pi}$  avec  $n$  un entier naturel  $\geq 1$  appelé nombre quantique principal.

- 2.1 Exprimer le moment cinétique de l'électron  $L_P(n)$  en fonction de  $r_n$ .
- 2.2 En déduire, en fonction de  $n$ , les rayons  $r_n$  des orbites autorisées pour l'électron.
- 2.3 En déduire que l'énergie  $E_n$  de l'électron occupant l'orbite  $n$  peut s'écrire  $-\frac{E_0}{n^2}$ . Calculer numériquement  $E_0$  en électron-Volt.

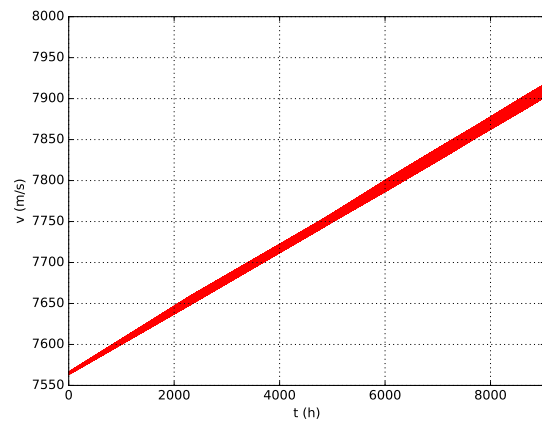
## M5 – Satellite soumis à une force de frottement

On considère un satellite, de masse  $m = 3 \text{ t}$  initialement en orbite circulaire autour de la Terre. Ce satellite évolue à basse altitude : initialement  $h_0 = 40 \text{ km}$ . A cause de l'atmosphère terrestre, il subit une force de frottement  $\vec{f} = -\mu v^2 \vec{e}_\theta$  avec  $\mu =$  supposé constant pendant toute la durée du mouvement.

1. Que se passe-t-il qualitativement ?
2. Ecrire les équations du mouvement dans la base cartésienne fixe par rapport au référentiel géocentrique.
3. Adimensionner les équations en opérant le changement de variable  $t^* = t/T$ ,  $x^* = x/R_T$  et  $y^* = y/R_T$  avec  $R_T$  le rayon de la Terre et  $T$  la période d'un satellite en orbite de rayon  $r = R_T$ .
4. La simulation conduit aux courbes fig.2a et 2b. Interpréter, commenter.



(a) Altitude



(b) Vitesse

FIGURE 2 – Mouvement du satellite soumis aux forces de frottements atmosphériques.