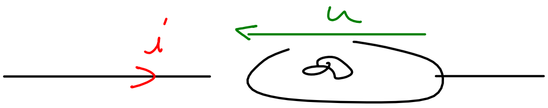
S12 bis
Impédance complexe.

1. Impédance complexe

1.1. Def



Régime sinusoïdal :
$u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$
$i(t) = i_m \cos(\omega t)$

Lien entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$?

Représentation complexe :
$\underline{u} = u_m e^{j(\omega t + \varphi)}$
$\underline{i} = i_m e^{j\omega t}$

On définit l'impédance complexe $\underline{Z}$ par :

$$\boxed{\underset{V}{\underline{u}} = \underset{\Omega}{\underline{Z}} \times \underset{A}{\underline{i}}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{u_m}{i_m} e^{j\varphi} \quad (*)$$

$(*) \Longrightarrow Z = |\underline{Z}| = \dfrac{u_m}{i_m}$

soit $\boxed{u_m = Z\, i_m}$

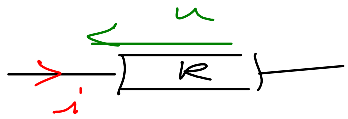
$(*) \Longrightarrow \boxed{\arg \underline{Z} = \varphi}$ avec φ : déphasage de u par rapport à i.

1.2. Impédance, admittance, résistance, réactance

- $Z = |\underline{Z}|$: impédance
- $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}}$: admittance complexe
  i.e. $\underline{i} = \underline{Y}\,\underline{u}$
  $Y = |\underline{Y}|$: admittance.
- $\underline{Z} = R + jX$ (R : résistance ; X : réactance)

2. Conducteur ohmique idéal.

2.1. Impédance



Loi d'Ohm : $u = Ri$

En RSF : $u = Ri$

$\Longrightarrow \underline{u} = R\,\underline{i}$

$\Longrightarrow \boxed{\underline{Z} = R}$

Conducteur ohmique idéal purement résistif $\Longrightarrow$ dissipe uniquement l'énergie.

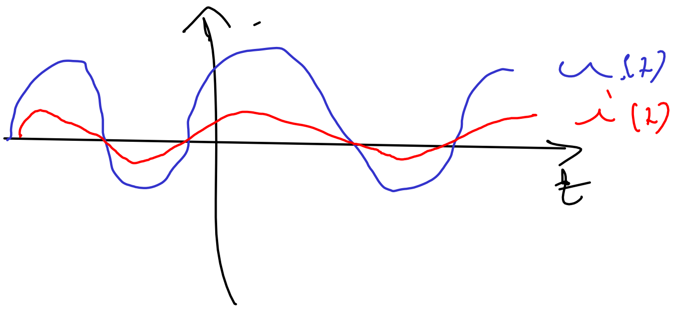
2.2. Déphasage tension / courant

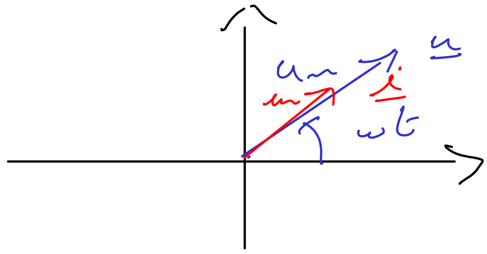
$u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$

$i(t) = i_m \cos \omega t$

$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arg(R) = 0$

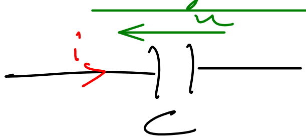
$\boxed{\varphi = 0}$





3. Condensateur idéal

3.1. Impédance



$\underline{u} = \underline{Z}\,\underline{i}$, $\underline{Z} = ?$

$i(t) = C\dfrac{du}{dt} \Longrightarrow \underline{i} = C\dfrac{d\underline{u}}{dt}$

avec $\underline{i} = i_m e^{j\omega t}$ et $\underline{u} = u_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

d'où :

$\underline{i} = jC\omega\,\underline{u} \Longleftrightarrow \underline{u} = \dfrac{1}{jC\omega}\,\underline{i}$

donc $\boxed{\underline{Z}_c = \dfrac{1}{jC\omega}}$

Condensateur idéal purement réactif $\Longrightarrow$ ne dissipe pas d'énergie.

$Z = |\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega}$

Le comportement du condensateur dépend de la fréquence !

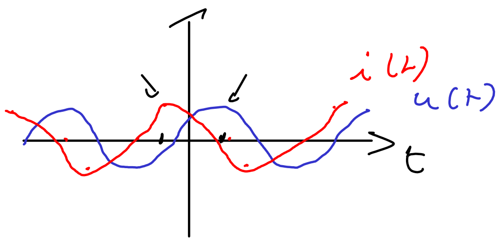
3.2. Déphasage tension / courant

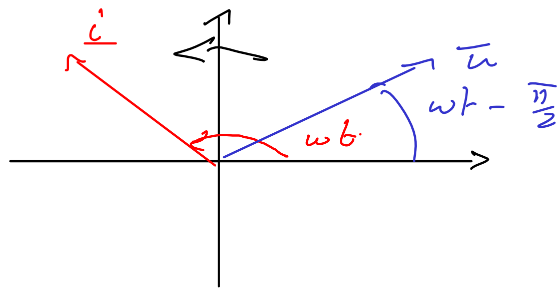
$u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$

$i(t) = i_m \cos \omega t$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{1}{jC\omega}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

u(t) est en quadrature retard de phase par rapport à i(t)

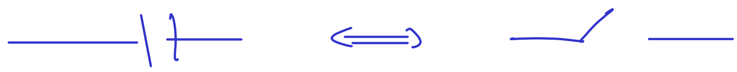




3. Comportement asymptotique

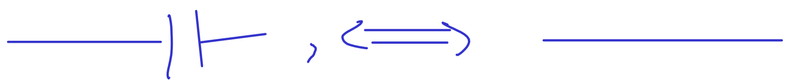
- Basse fréquence $\omega \to 0$

$$\lim_{\omega \to 0} Z_C = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{C\omega} = +\infty$$



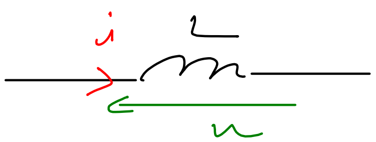
- Haute fréquence : $\omega \to +\infty$

$$\lim_{\omega \to +\infty} Z_C = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{C\omega} = 0$$



4. Bobine idéale

4.1. Impédance



$u = L\frac{di}{dt}$

$\Longrightarrow \underline{u} = L\frac{d\underline{i}}{dt}$

$\Longleftrightarrow \underline{u} = jL\omega\,\underline{i}$

Or par déf $\underline{u} = \underline{Z}_L\,\underline{i}$ donc :

$$\boxed{\underline{Z}_L = jL\omega}$$

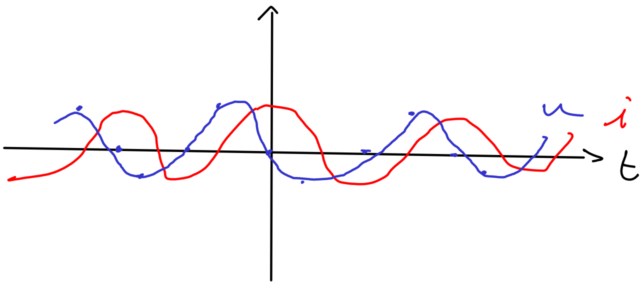
4.2. Déphasage tension / courant

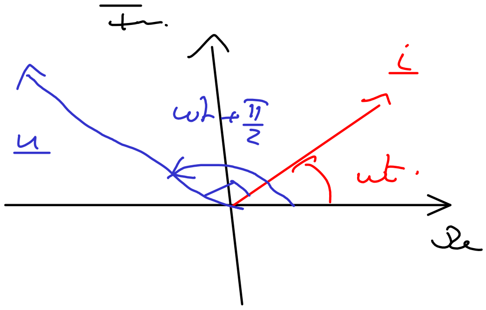
$i(t) = i_m \cos(\omega t)$

$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow \varphi = \arg \underline{Z} = \arg(j\underbrace{L\omega}_{>0}) = +\frac{\pi}{2}$

$u(t)$ est en quadrature avance de phase sur $i(t)$



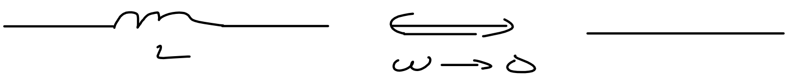


4.3. Comportement asymptotique

$Z_L = |\underline{Z}_L| = L\omega$

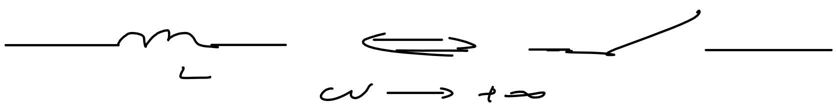
* Basse fréquence

$$\lim_{\omega \to 0} Z_L = \lim_{\omega \to 0} L\omega = 0$$



* Haute fréquence.

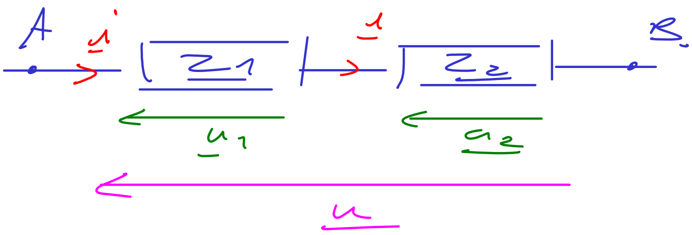
$$\lim_{\omega \to +\infty} Z_L = \lim_{\omega \to +\infty} L\omega = +\infty$$



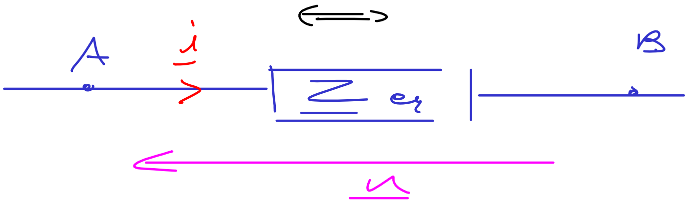
5. Association d'impédances.

5.1. Série

5.1.1. Impédance équivalente

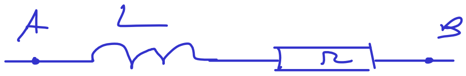


$\Longleftrightarrow$



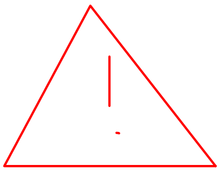
Voir 59 : $\boxed{\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

Application 1 :

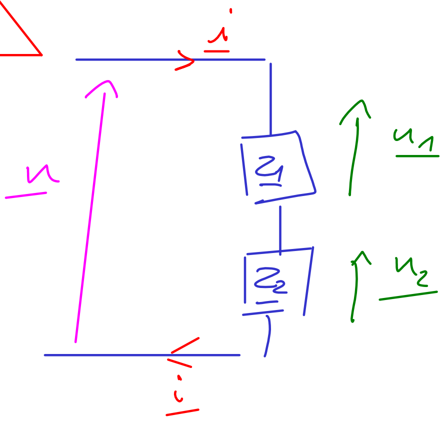


Impédance de la bobine ?

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_r = jL\omega + r$$



5.1.2. Pont diviseur de tension

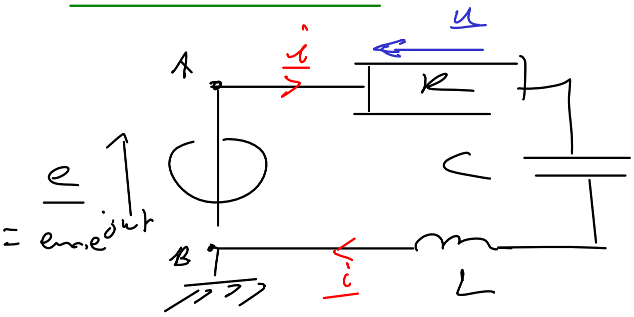


$$\boxed{\underline{u_1} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\,\underline{u}}$$

Généralisation à N impédance en série.

$$\boxed{\underline{u_k} = \frac{\underline{Z_k}}{\sum_{j=1}^{N} \underline{Z_i}}\,\underline{u}}$$

Application 2 :



$\underline{u}$? puis $\underline{u_m}$?

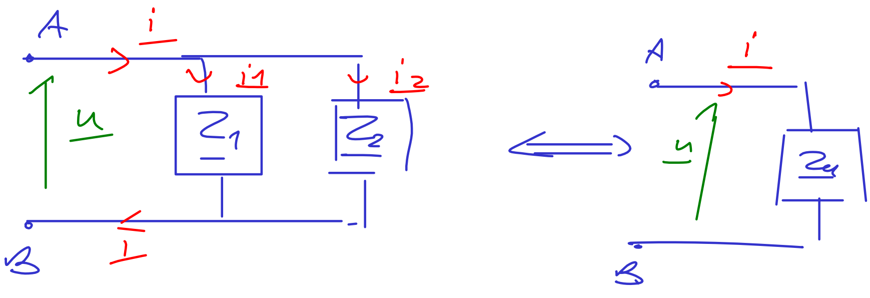
$\underline{u_m} = u_m e^{j\omega t}$.

Pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\,\underline{e} \Longrightarrow \boxed{\underline{u_m} = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\,\underline{e_m}}$$

5.2. Association parallèle

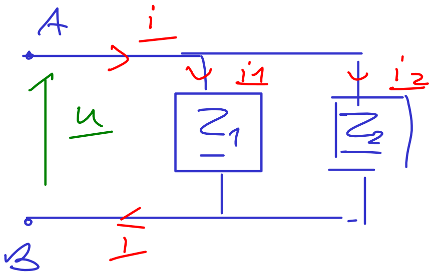
5.2.1. Impédance équivalente



Voir 5.3 : $\boxed{\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$

ou $\dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2}$

5.2.2. Pont diviseur de courant



$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\,\underline{i}$$

$$\underline{i}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\,\underline{i}$$