Devoir Surveillé 6 – Physique-Chimie

D.Malka – MPSI 2017-2018 – Lycée Saint-Exupéry

17.02.2018

Durée de l'épreuve : 2h00

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'énoncé de ce devoir comporte 4 pages.

— *Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.*
— *Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.*
— *La numérotation des exercices doit être respectée. Les résultats doivent être systématiquement encadrés.*
— *Les pages doivent être numérotées de la façon suivante : n °page courante/nombre total de pages.*

Problème 1 – Pourquoi il faut freiner avant un virage.

On considère une voiture de masse m et de centre d'inertie I roulant sur une route rectiligne horizontale Ox à la vitesse $v_0 = 90\,\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ avec un mouvement uniforme. On note $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire de l'axe Ox dans le sens du déplacement. La voiture aborde ensuite un virage modélisé par un demi-cercle de rayon $R = 50\,\text{m}$. La situation est représentée à différents instants fig.1.

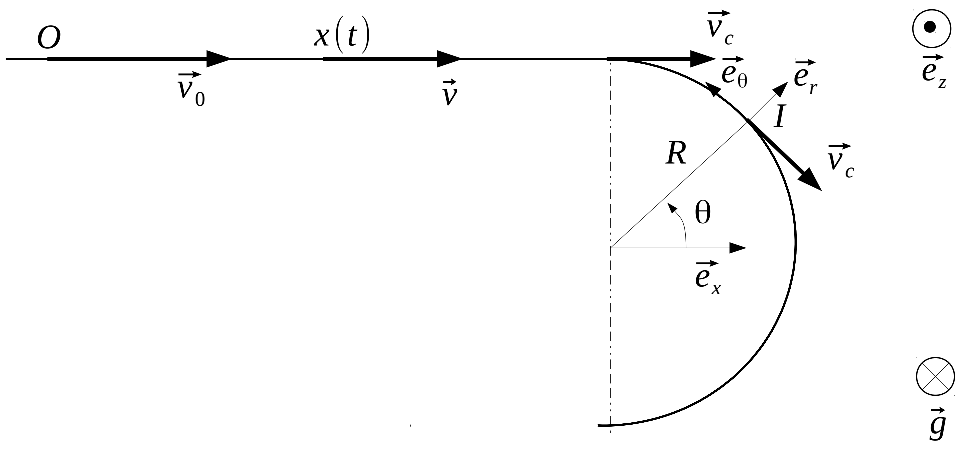


Figure 1 – La vitesse de la voiture en différents points de sa trajectoire

1. A l'approche du virage, à $t = 0$, la voiture décélère avec une accélération $a_0 = -5\,m.s^{-2}$ constante pendant une durée t_0. Exprimer la vitesse v de la voiture au moment d'aborder le virage.
2. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ du centre d'inertie I de la voiture durant la phase de décélération.
3. On s'intéresse au mouvement du centre d'inertie I de la voiture dans le virage. On suppose qu'elle le parcourt à vitesse constante v_c.
   3.1 Que dire de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ au cours du mouvement ?
   3.2 En déduire l'expression de l'accélération $\vec{a}$ de I dans le virage.

Document 1 – Quelques valeurs du cœfficient de frottement dynamique λ

matériaux	coefficient de frottement dynamique λ
acier sur glace	0,050
acier sur acier	0,40
verre sur verre	0,40
pneu sur béton sec	0,70
pneu sur béton mouillé	0,50
semelle de cuir sur bois	0,20
semelle de cuir sur tapis	0,50

3.3 Montrer que, au cours du mouvement, la voiture est nécessairement soumise d'une part à une force $\vec{N}$ verticale et d'autre part à une force $\vec{T}$ radiale orientée vers le centre O du virage.

3.4 Exprimer $\|\vec{N}\|$ en fonction de m et g.

3.5 Exprimer $\|\vec{T}\|$ en fonction de v_c.

3.6 On admet que la voiture adhère au sol tant que $\|\vec{T}\| < \lambda\|\vec{N}\|$. Sinon elle dérape. Exprimer la vitesse maximale v_{max} avec laquelle la voiture peut aborder le virage sans déraper en fonction de g, R et λ.

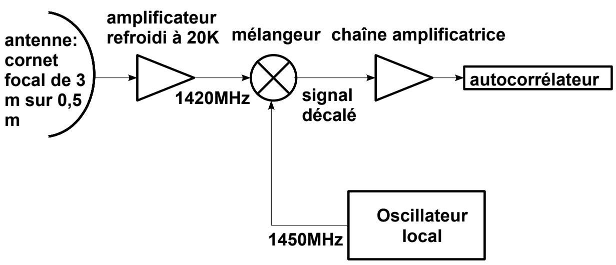
3.7 Commenter l'expression de v_{max}.

3.8 Application numérique sur route sèche puis sur route verglacée.

4. A quelle distance minimale d_0 du virage faut-il commencer à freiner pour le prendre sans risque de déraper (sur route sèche) ?

Problème 2 – Simulation d'un élément de radiotélescope

Inauguré en 1965, le radiotélescope de Naçay a été créé pour étudier le décalage Doppler de la raie 21cm de l'atome d'hydrogène due au couplage spin nucléaire-spin électronique. C'est un moyen privilégié d'étude de la cinématique de l'hydrogène interstellaire, et donc des mouvements de l'Univers. De 1956 à 1967, de nombreux chercheurs ont travaillé à la délicate mise au point de la chaîne de réception suivante.



On se propose de reproduire simplement le principe d'un mélangeur en TP en se plaçant 6 décades plus bas en fréquence.

1. **Dédoublement de fréquence.**
Aucune connaissance préalable sur le mélangeur AD633 n'est nécessaire.
Soit les deux tensions :
— $a(t) = A\sqrt{2}\cos(2\pi f_a t)$, avec $f_a = 1420\,\mathrm{Hz}$
— $e_0(t) = E_0\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$, avec $f_0 = 1450\,\mathrm{Hz}$
mises en entrée d'un multiplieur AD63. On obtient en sortie la tension :

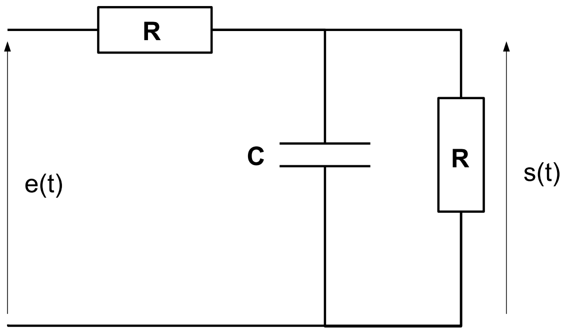
$$m(t) = a(t)e_0(t)$$

Démontrer que $m(t)$ est la superposition de deux signaux de fréquence f et $f' > f$ soit :

$$m(t) = M[cos(2\pi ft + \varphi_0) + cos(2\pi f't + \varphi_0)]$$

avec $f = 2870\,\mathrm{Hz}$, $f' = 30\,\mathrm{Hz}$ et M à déterminer.

2. **Filtrage.**
   On utilise le filtre suivant :



   2.1 Déterminer sans calcul la nature de ce filtre.
   2.2 Déterminer sa fonction de transfert $\underline{H}(x)$ en fonction de $x = \omega RC$.
   2.3 Exprimer sa pulsation de coupure ω_c à $-3\,\mathrm{dB}$ en fonction de R et C.
   2.4 On a tracé le diagramme de Bode en gain de ce filtre (fig.2).

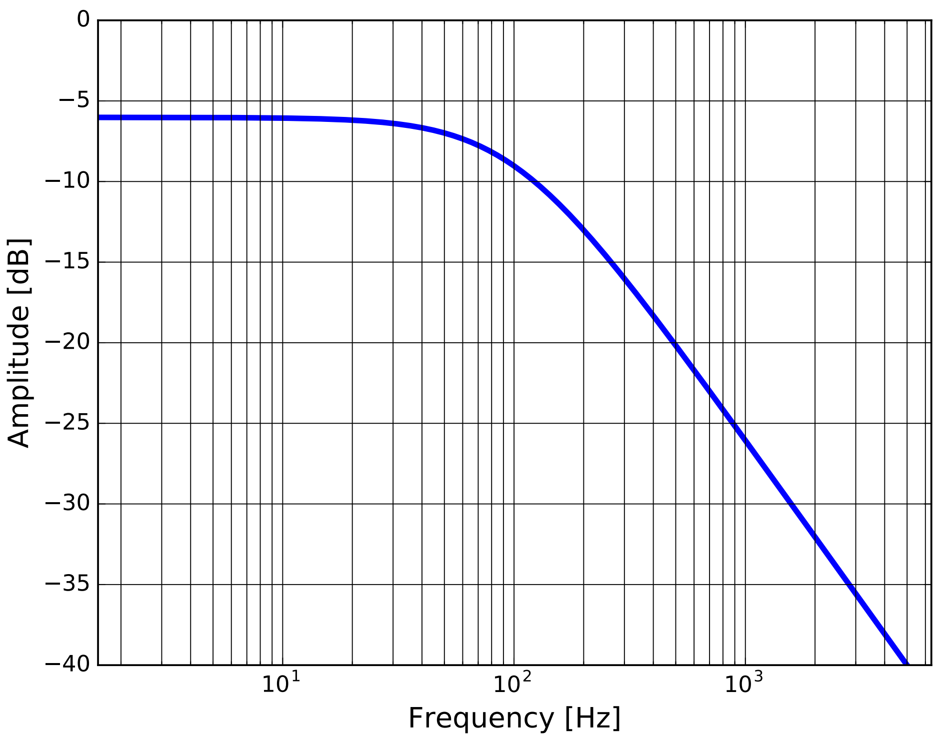


Figure 2 – Diagramme de Bode du filtre

   Déterminer la bande passante à $-3\,\mathrm{dB}$ du filtre.

3. Le mélangeur.
   On place à l'entrée de ce filtre le signal $m(t)$. La sortie est alors :

$$s(t) = S\cos(2\pi f t + \varphi_s) + S'\cos(2\pi f' t + \varphi_s')$$

   3.1 Déterminer la valeur numérique de S/S'. Commenter.
   3.2 Sachant que l'atténuation de la véritable chaîne de réception est bien supérieure, en déduire la valeur de la fréquence du signal décalé de la chaîne originale.

Problème 3 – Détecteur Virgo, isolation sismique des éléments d'optique

La théorie de la relativité générale d'Einstein prévoit l'existence d'ondes gravitationnelles ($O.G.$) ,c'est-à-dire des vibrations de l'espace-temps, engendrées par les masses en accélération. Le détecteur franco-italien Virgo vise à détecter des ondes gravitationnelles par des méthodes d'interférométrie optique employant des miroirs. En août 2017, une onde gravitationnelle résultant de la coalescence de deux trous noirs a ainsi été détectée.

Les vibrations sismiques du sol ont des amplitudes plus importantes que celles des $O.G.$. Il est donc essentiel que ces vibrations n'atteignent pas les composants optiques de l'interféromètre. On introduit alors, entre la Terre et les miroirs, des isolateurs mécaniques permettant une isolation verticale et horizontale. Cette partie propose d'étudier l'isolation horizontale. Le miroir sera assimilé à une masse ponctuelle G de masse M. On ne considérera que des petits déplacements ; on appelle g le champ de pesanteur, dirigé selon l'axe Oz dans le sens des négatifs.

1. Pendule simple.
   On considère un pendule simple formé d'un fil sans raideur, de masse négligeable, de longueur L_p ; l'une de ses extrémités est reliée au point fixe O_1 d'abscisse x_0, l'autre à la masse G, supposée ponctuelle, d'abscisse $x_1(t)$.

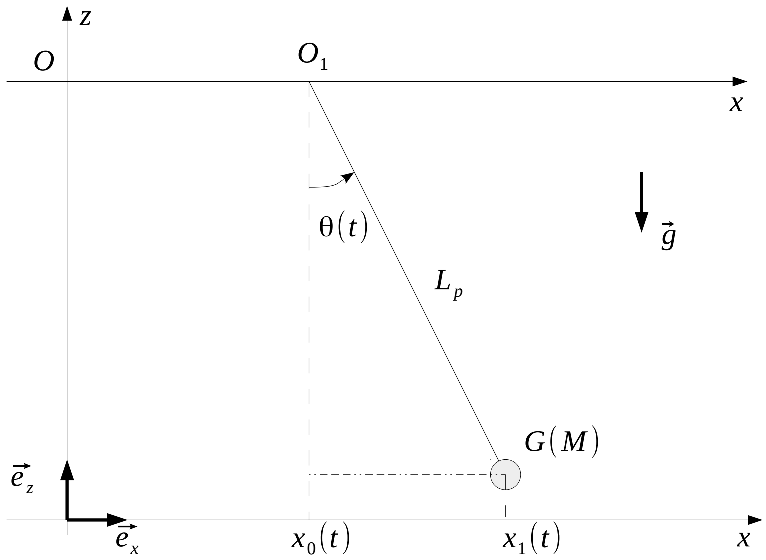


FIGURE 3 – Les éléments d'optique sont suspendus pour amortir les vibrations horizontales

1.1 Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ. On introduira la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L_p}}$.

1.2 Exprimer $\sin\theta$ en fonction de x_1, x_0 et L_p. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$ en supposant que les oscillations du pendule sont de faible amplitude. *Cette hypothèse est supposée vérifiée dans toutes la suite.*

2. Sous l'effet des vibrations sismiques, le point O_1 est maintenant mobile, son abscisse variant sinusoïdalement : $x_0(t) = X_0 \cos(\omega t)$. De plus, un dispositif d'amortissement des oscillations du pendule exerce la force $-\dfrac{M}{\tau}\dfrac{dx_1}{dt}\vec{e}_x$.

2.1 Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$. En régime établi, sous quelle forme peut-on écrire $x_1(t)$?

2.2 Déterminer alors, pour ce régime, la relation entre les amplitudes complexes $\underline{X}_1$ et $\underline{X}_0$ respectivement de $x_1(t)$ et $x_0(t)$.

2.3 *Application numérique* : $\tau = 100\,\mathrm{s}$, $\omega_0 = 2\pi \times 0{,}5\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $\omega = 2\pi \times 10^{-3}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $X_0 = 1\,\mu\mathrm{m}$. Calculer l'amplitude des oscillations du miroir. Sachant qu'une onde gravitationnelle entraîne un allongement du trajet optique de la lumière de l'ordre de $1 \times 10^{-18}\,\mathrm{m}$, l'isolation est-elle suffisante ?

2.4 On souhaite également, par un modèle du même type, mesurer l'amplitude des vibrations sismiques : dans quel domaine doit-on alors choisir ω_0 ? Justifier.