Devoir Surveillé 6 – Physique-Chimie

D.Malka – MPSI 2016-2017 – Lycée Saint-Exupéry

04.03.2017

Durée de l'épreuve : 3h00

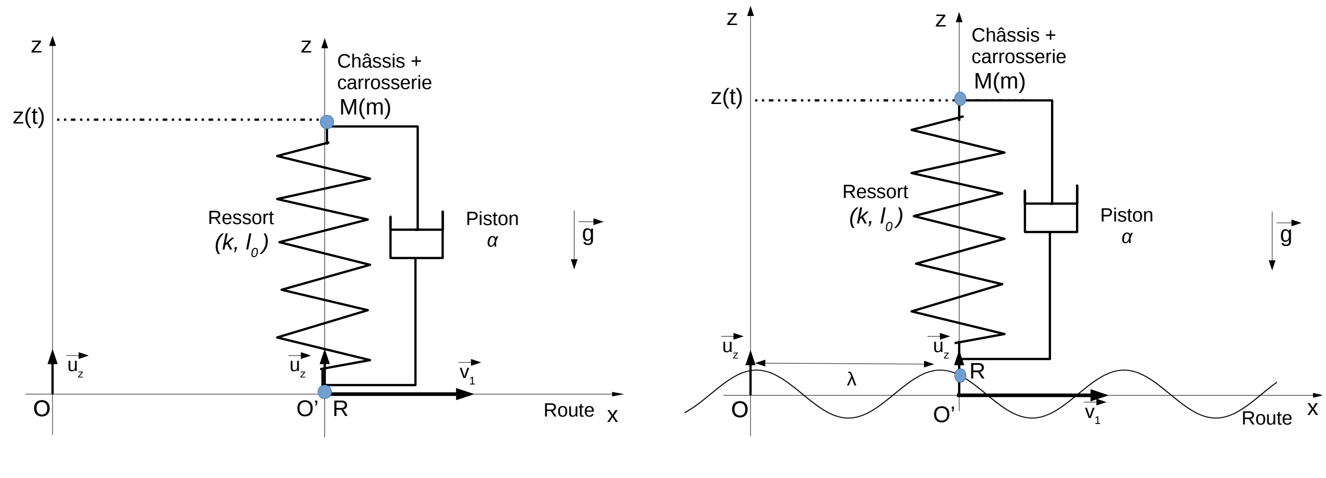
L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'énoncé de ce devoir comporte 6 pages.

— *Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.*
— *Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.*
— *La numérotation des exercices doit être respectée. Les résultats doivent être systématiquement encadrés.*
— *Les pages doivent être numérotées de la façon suivante : n°page courante/nombre total de pages.*

Problème 1 – Suspension automobile

On s'intéresse à la suspension d'une voiture se déplaçant le long d'une route bosselée. On assimile le châssis de la voiture à un point matériel M de masse m et d'altitude $z(t)$. La suspension, liant le châssis M à la roue R, est modélisée par l'association d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 et d'un amortisseur exerçant une force $\vec{f} = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{z}_R))\vec{e}_z$ sur le châssis, où $z_R(t)$ est l'altitude de la roue, assimilée elle aussi, pour alléger les calculs, à un point R (fig.1). On note v_1 la composante horizontale de la vitesse de la voiture supposée constante. On suppose que la roue reste en contact permanent avec la route. Le profil moyen de la route est horizontal. A $t = 0$, l'abscisse de la de M vaut 0. Enfin, on se place dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne à la vitesse $\vec{v_1}$ par rapport à la route.



(a) Route droite

(b) Route bosselée

Figure 1 – Modélisation de la voiture

1. Exprimer la force $\overrightarrow{T}$ de tension du ressort en fonction de $z(t)$, $z_R(t)$, l_0 et k.

2. Sur route horizontale droite ($z_R(t) = 0$, fig.1a), exprimer la position d'équilibre z_e du point M dans $\mathcal{R}'$.
3. La profil de la route est donnée par la fonction $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ (fig.1b).

 3.1 Montrer que $z_R(t) = h_m \cos(\omega t)$ où on exprimera h_m et ω en fonction de λ, v_1 et h_0.

 3.2 Montrer que l'équation différentielle $Z(t) = z(t) - z_e$ s'écrit :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \frac{F_m(\omega)}{m}\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

 avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$ et où on exprimera F_m et φ en fonction de ω, ω_0, Q et h_m.

 3.3 Proposer une expression générale pour la fonction $Z(t)$ en régime établi.

 3.4 Exprimer l'amplitude Z_m de $Z(t)$ en fonction de ω, ω_0, Q, et $F_m(\omega)$.

 3.5 On représente Z_m en fonction de ω (fig.2) pour certaines valeurs des paramètres m, k, α, λ et h_0. Commenter. Interpréter physiquement les comportement-limites pour $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$.

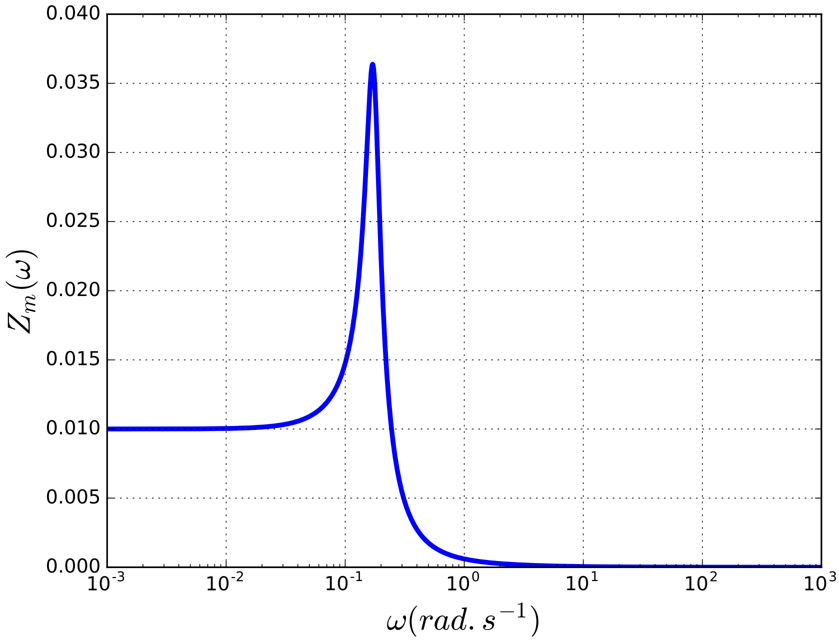


FIGURE 2 – Amplitude des oscillations du châssis de la voiture en fonction de ω. $h_0 = 10\,cm$, $\lambda = 10\,cm$, $\omega_0 = 0,17$, $Q = 3,5$.

 3.6 Dans quel domaine de fréquence est-il préférable que la réponse Z_m du véhicule se situe pour voyager confortablement malgré les défauts de la route ?

 3.7 Sur un champ de bosses de période spatiale $\lambda \sim 10\,cm$, il est préférable de rouler lentement ! Proposer une valeur de la raideur k pour voyager confortablement sur ce champ de bosses. On prendra $v_1 = 10\,km.h^{-1}$.

Problème 2 – Filtrage d'un bruit électronique

On considère le filtre fig.3 de fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}$$

1. **Etude du filtre**

 1.1 Quelle est la nature du filtre ? Justifier.

 1.2 Déterminer l'expression, en fonction de τ, de la fréquence de coupure f_c à $-3\,dB$ de ce filtre.

 1.3 On donne les diagrammes de Bode du filtre (fig.7 en annexe, à la dernière page de l'énoncé)

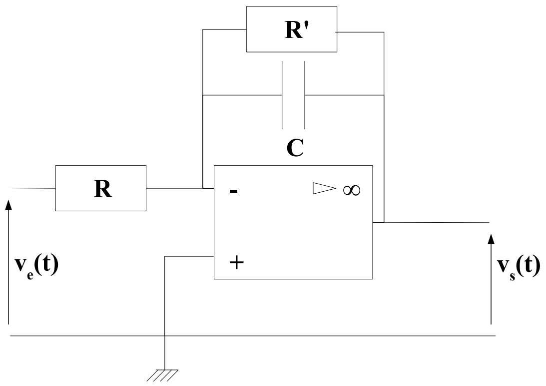


FIGURE 3 – Filtre

1.3.1 Faire figurer clairement le point correspondant à la fréquence de coupure f_c sur la figure 7. **On rendra donc l'annexe avec l'énoncé**. Mesurer sa valeur.

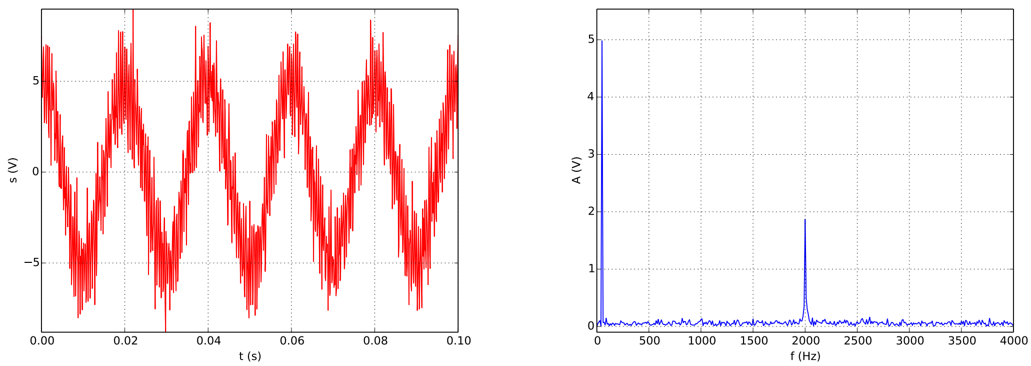
1.3.2 Montrer que ce filtre se comporte à haute fréquence (condition qu'on explicitera) comme un filtre intégrateur. Illustrer graphiquement ce résultat sur le diagramme de Bode.

2. **Utilisation du filtre**

On considère le signal $e(t)$ fig.4.

On peut écrire $e(t)$ sous la forme $e(t) = u(t) + b(t)$ avec :

$$\begin{cases} u(t) = E\cos(2\pi f_u t) & \text{signal utile} \\ b(t) & \text{bruit} \end{cases}$$



(a) Signal $e(t)$ (b) Spectre de $e(t)$

FIGURE 4 – Signal bruité

On souhaite éliminer le bruit capté en plus du signal utile.

On appelle *rapport signal sur bruit* la quantité :

$$SNR = 20\log\left(\frac{u_{eff}}{b_{eff}}\right)$$

où u_{eff} est la valeur efficace du signal utile et b_{eff} la valeur efficace du bruit. Il se mesure en décibels.

2.1 Déterminer la fréquence f_u du signal utile $u(t)$ (celui de plus grande amplitude).

2.2 Que valent l'amplitude et la fréquence de la composante la plus importante du bruit ?

2.3 Calculer le rapport signal sur bruit SNR_e du signal d'entrée $e(t)$.

2.4 On souhaite augmenter le rapport signal sur bruit d'au moins $15\,dB$. Le filtre étudié précédemment est-il adapté ?

2.5 Représenter le spectre du signal après filtrage puis l'allure du signal lui-même.

Problème 3 – Mouvement sur un manège

On considère un manège en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de son axe Oz fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen (Fig.5). On note R le rayon de la plateforme tournante du manège (fig.5).

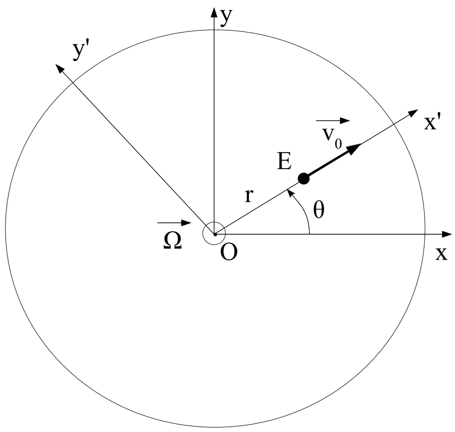


FIGURE 5 – Manège vu de dessus

Un enfant E descend prématurément du manège pour rejoindre son papa et sa maman car il a peur finalement. Du centre O du manège, il se dirige vers l'extérieur en suivant toujours le même rayon du manège. Dans $\mathcal{R}_T$ sa trajectoire est donnée par l'équation paramétrée suivante :

$$\begin{cases} r(t) = v_0.t \\ \theta(t) = \omega_0.t \end{cases}$$

1. Donner les dimensions et unités légales de ω_0 et v_0.
2. Déterminer l'équation de la trajectoire en coordonnées polaire $r = f(\theta)$. On posera $r_0 = \dfrac{v_0}{\omega_0}$.
3. La trajectoire est une spirale. Elle est représentée fig.6. Faire apparaître le pas p de la spirale sur la figure et donner son expression.

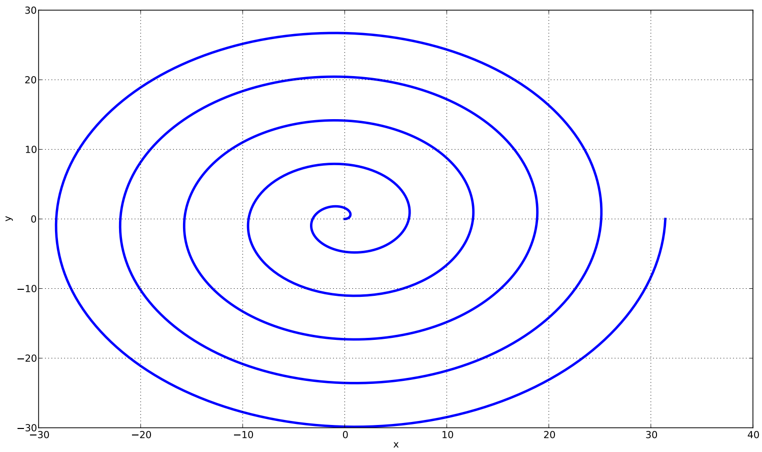
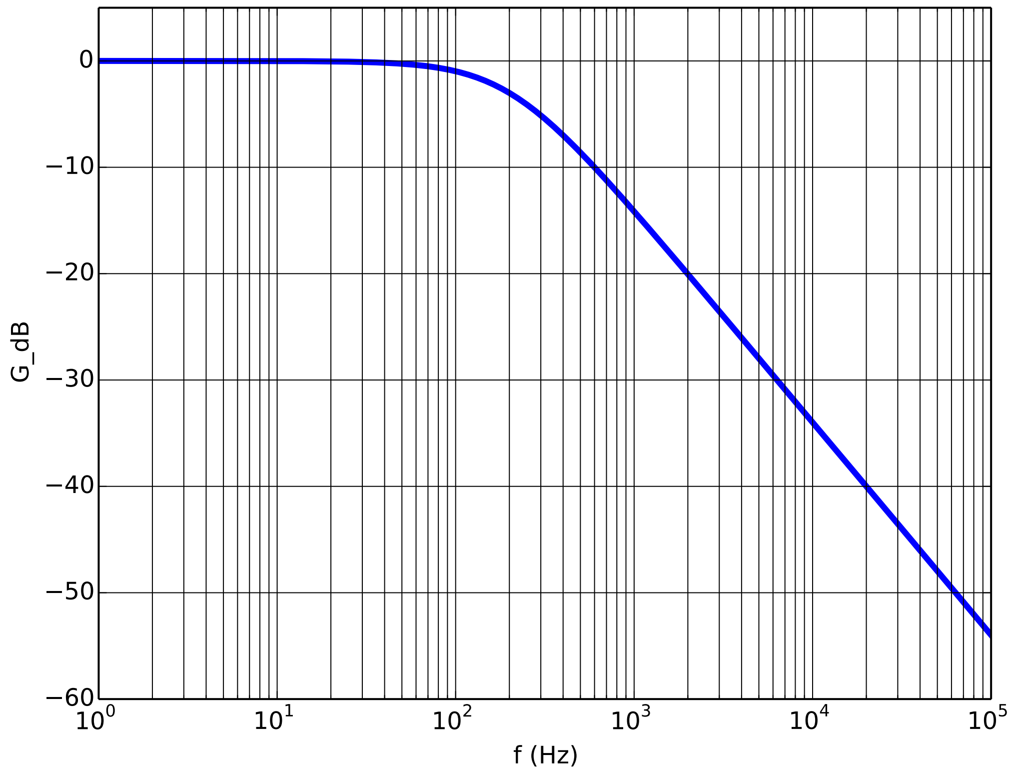


FIGURE 6 – Trajectoire de l'enfant dans le référentiel terrestre

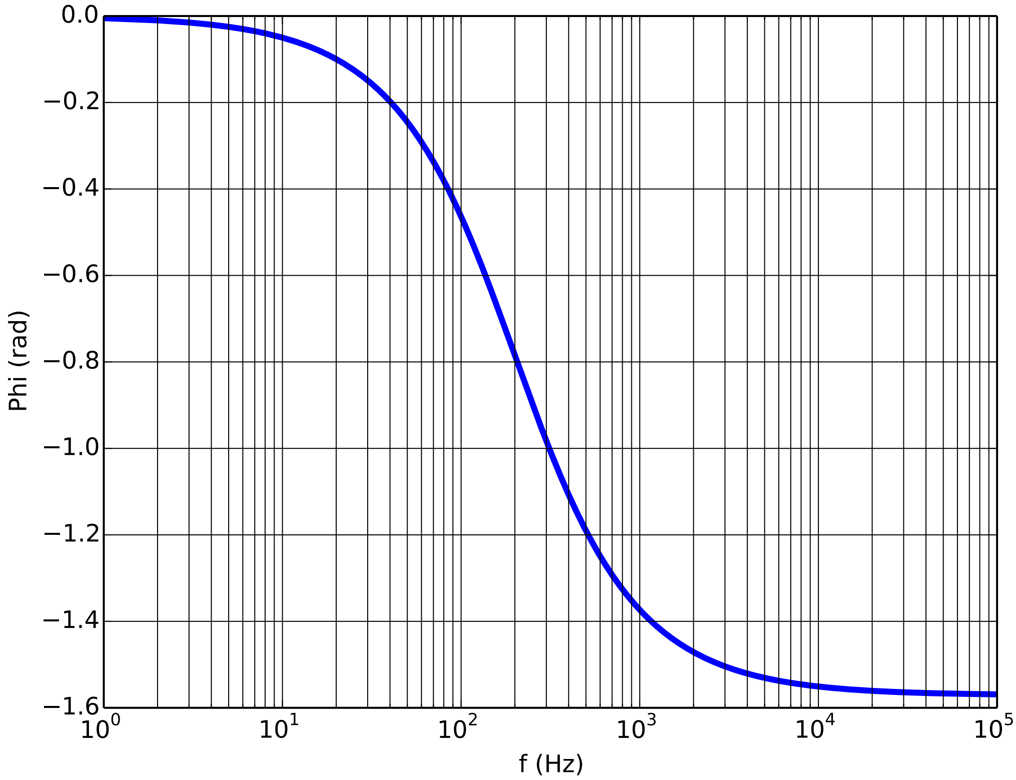
4. Longueur de la trajectoire.
   4.1 Exprimer le vecteur déplacement élémentaire $\vec{dl}$ de E dans la base polaire.
   4.2 En déduire la norme dl de $\vec{dl}$ en fonction de r_0, r et dr.
   4.3 Exprimer alors la longueur de la trajectoire sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.
5. Vitesse.
   5.1 Exprimer le vecteur vitesse de E dans la base polaire en fonction de r_0 et ω_0.
   5.2 Reproduire la trajectoire fig.6 puis représenter à l'échelle le vecteur vitesse $\vec{v}$ aux points M_1 de coordonnées $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et M_2 de coordonnée $\theta = 4\pi$.
6. Exprimer l'accélération de E dans la base polaire en fonction de r_0 et ω_0 et θ.
7. Décrire le mouvement de E dans le référentiel du manège.

★★★★★FIN DE L'ÉNONCÉ★★★★★

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE



(a) Gain



(b) Phase

Figure 7 – Diagrammes de Bode