



DS7 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2017-2018 – Lycée Saint-Exupéry

17.03.2018

Problème 1 – Le cuivre et l'un de ses minerais, la chalcopryrite

1. L'élément cuivre

1.1 Le cuivre est ^{63}Cu comprend 29 protons et $63 - 29 = 34$ neutrons.

1.2 $\text{Cu} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^9 4s^2$

1.3 $\text{Cu} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$: stabilisation par saturation de la sous-couche $3d$ et/ou couche $3d$ moins énergétique que la $4s$.

1.4 Le cuivre ^{64}Cu est radioactif (fig.1) :

$^{64}\text{Cu} =$ produits de désintégration

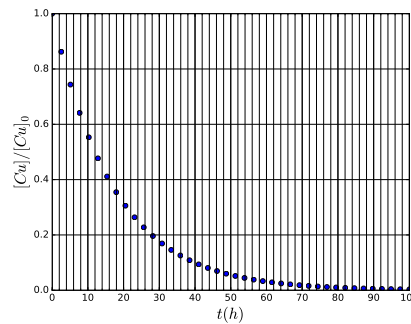


FIGURE 1 – Désintégration radioactive du cuivre ^{64}Cu

1.4.1 Graphiquement, on lit $t_{1/2} \approx 12$ h.

1.4.2 Loi cinétique de la désintégration de ^{64}Cu d'ordre 1 donc :

$$\frac{d[\text{Cu}]}{dt} = -k[\text{Cu}]$$

de solution :

$$[\text{Cu}] = [\text{Cu}]_0 e^{-kt}$$

On en déduit que :

$$[\text{Cu}](t_{1/2}) = [\text{Cu}]_0 e^{-kt_{1/2}} = \frac{[\text{Cu}]_0}{2}$$

D'où :

$$k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

A.N. : $k = 1,6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

2. Structure cristalline du cuivre métallique

Le cuivre métallique cristallise suivant le système cubique à faces centrées de paramètre de maille a . On supposera que les atomes de cuivre les plus proches sont en contact.

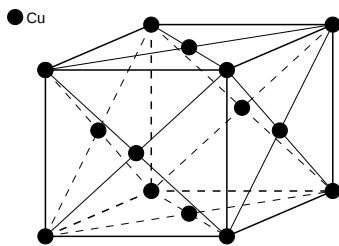


FIGURE 2 – Maille du cuivre

- 2.1 Maille conventionnelle du cuivre métallique : fig.2.
- 2.2 La maille de cuivre contient 4 atomes de cuivre.
- 2.3 Paramètre de maille a . Tangence des atomes de cuivre plus proches voisins suivant la diagonale d'une face d'un cube :

$$\sqrt{2}a = 4r_{Cu} \Leftrightarrow r_{Cu} = 2\sqrt{2}a$$

A.N. : $a = 359,2 \text{ pm}$

- 2.4 Compacité :

$$c = \frac{V_{atomes}}{V_{mailles}}$$

avec $V_{mailles} = a^3$, $V_{atomes} = \frac{4}{3}r_{Cu}^3$.

$$c = \frac{4}{3} \pi \frac{r_{Cu}^3}{a^3}$$

A.N. : $c = 74\%$

- 2.5 Masse volumique :

$$\rho = \frac{4M_{Cu}}{N_A a^3}$$

A.N. : $\rho = 9,13 \text{ kg} \cdot \text{m}^3$

3. La chalcopryrite

La chalcopryrite est un minerai mixte de cuivre et de fer de formule chimique : $CuFeS_2$.

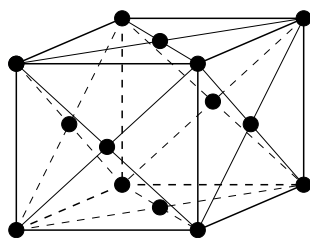


FIGURE 3 – La chalcopryrite. Ne sont représentés que les ions S^{2-} .

- 3.1 La configuration électronique $3s^2 3p^6 3d^{10}$ montre que le cuivre a perdu uniquement l'électron sur la couche $3d$ et a donc formé l'ion Cu^+ . Soit q_{Fe} la charge du fer. L'électronneutralité du cristal impose :

$$q_{Cu} + q_{Fe} + 2q_S = 0$$

Or le soufre est présent sous la forme d'ions S^{2-} donc $q_S = -2e$ d'où :

$$-4e + q_{Fe} + e = 0 \Leftrightarrow q_{Fe} = 3e$$

Le fer est présent sous forme d'ions Fe^{3+} .

3.2 Une maille contient 4 ions soufre S^{2-} et deux fois moins de fer donc 2 ions Fe^{3+} et deux fois moins de cuivre donc 2 ions Cu^+ .

3.3 Fraction massiques :

$$\omega_S = \frac{4M_S}{M} \quad \omega_{Fe} = \frac{2M_{Fe}}{M} \quad \omega_{Cu} = \frac{2M_{Cu}}{M} \quad \text{avec} \quad M = 4M_S + 2M_{Fe} + 2M_{Cu}$$

A.N. : $\omega_S = 35,0\%$, $\omega_{Fe} = 30,4\%$, $\omega_{Cu} = 34,6\%$.

3.4 Sachant que le paramètre de maille vaut 580 pm, la structure formée par les anions est-elle compacte ?

Déterminons s'il y a contact entre les anions plus proches voisins. Si c'est le cas, la tangence se fait suivant la diagonale d'une face d'un carré de longueur $\sqrt{2}a = 820$ pm. Le long de cette diagonale, les ions soufres occupent la longueur $4r_{S^{2-}} = 720$ pm. $\sqrt{2}a > 4r_{S^{2-}}$ donc les anions plus proches voisins ne sont pas en contact : la structure n'est pas compacte.

3.5 Sites interstitiels : fig.4.

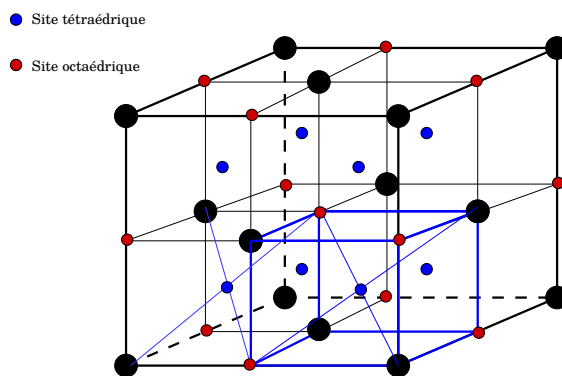


FIGURE 4 – Sites interstitiels de la maille cubique faces centrées

3.6 Habitabilité d'un site tétraédrique : fig.5.

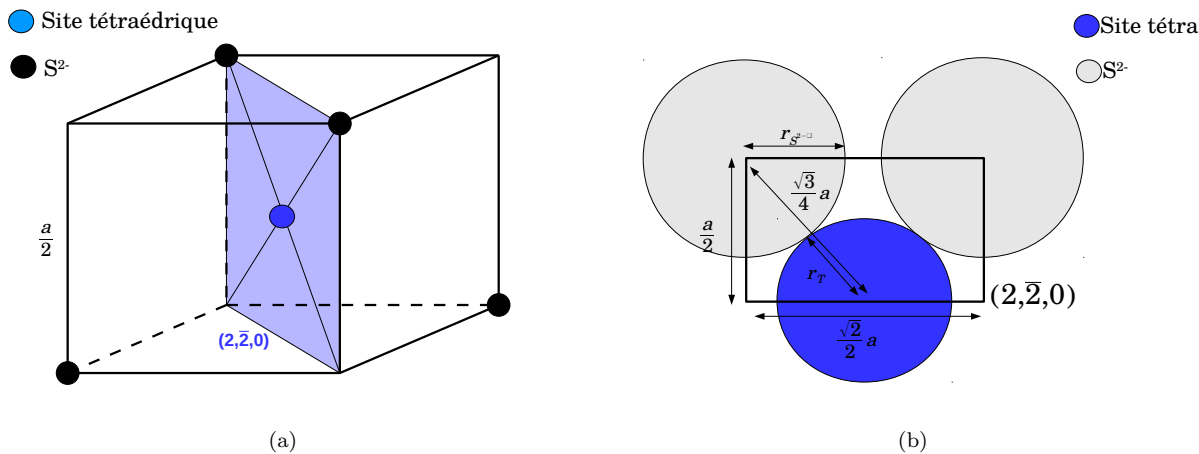


FIGURE 5 – Calcul de la taille d'un site tétraédrique.

$$r_T + r_{S^{2-}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

$$r_T = \frac{\sqrt{3}}{4}a - r_{S^{2-}}$$

A.N. : $r_T = 71 \text{ pm}$

Habitabilité d'un site octaédrique : fig.6.

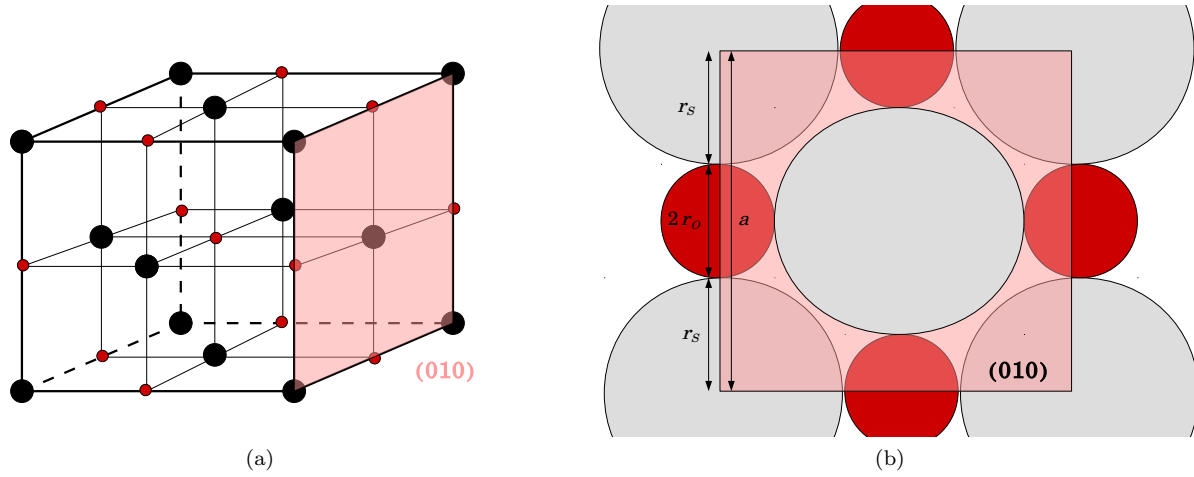


FIGURE 6 – Calcul de la taille d'un site octaédrique.

$$2r_O + 2r_{S^{2-}} = a$$

$$r_O = \frac{a}{2} - r_{S^{2-}}$$

A.N. : $r_O = 110 \text{ pm}$

3.7 Compte-tenu de la taille des sites octaédriques et tétraédrique, on peut supposer que les ions Fe^{3+} ($r_{Fe^{3+}} < r_T$) occupent un site tétraédrique sur 2 et que les ions Cu^+ occupent un site octaédrique sur 2 ($r_T < r_{Cu^+} < r_O$) : fig.7.

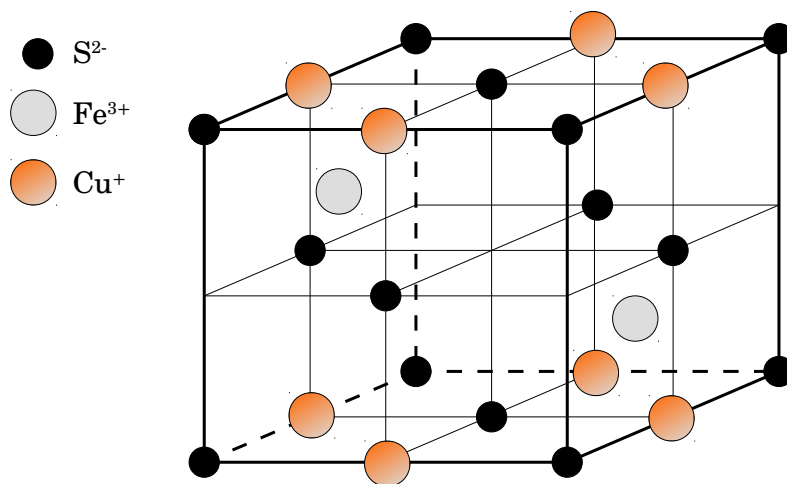


FIGURE 7 – Proposition de maille pour la chalcopryte

Problème 2 – Comment faire un looping ... sans se louper

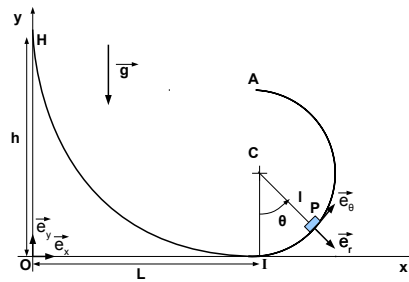


FIGURE 8 – Rampe de looping

1. Les seules forces s'exerçant sont le poids et la réaction normale. Or le poids est conservatif et le travail de la réaction normal est nul. Le système est donc conservatif.
2. Etude mécanique du problème.

Système : point matériel $P(m)$

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :

— poids $\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

— réaction $\vec{R} \perp \vec{dl}$.

Conservation de l'énergie mécanique entre H et P :

$$E_m(P) = E_m(H)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_P^2 + mgz_P + K = \frac{1}{2}mv_H^2 + mgh + K$$

avec $v_H = 0$ et $z_P = l(1 - \cos \theta)$:

$$v_P = \sqrt{2mg(h - l(1 - \cos \theta))}$$

3. Pour un mouvement circulaire :

$$v_P = l\dot{\theta}$$

4. Appliquons le principe fondamentale de la dynamique au point matériel :

$$m\vec{a}(P)|_R = \vec{R} + \vec{P}$$

Projetons cette relation dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\vec{v}(P) = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a}(P) = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{e}_r = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{v(P)^2}{l}\vec{e}_r$$

d'où :

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta & \text{suivant } \vec{e}_\theta \quad (1) \\ -m\frac{v(P)^2}{l} = R(\theta) + mg \cos \theta & \text{suivant } \vec{e}_r \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow R(\theta) = -m\frac{v(P)^2}{l} - mg \cos(\theta)$$

$$R(\theta) = -mg \left[\frac{2h}{l} + 3 \cos(\theta) - 2 \right]$$

5. Tant que le point P est en contact avec le rail, $R(\theta) < 0$.
6. Pour atteindre A , le point matériel doit demeurer en contact avec le rail c'est à dire que $R(\theta)$ ne doit pas s'annuler avant A . $R(\theta)$ est une fonction décroissante de θ donc si $R(A) \geq 0$ alors cette relation est vérifiée pour tout point de la portion IA .

Le point matériel arrive en $A(\theta = \pi)$ si :

$R(\pi) \geq 0$ ce qui donne $h \geq h_m$ avec

$$h_m = \frac{5}{2}l$$

7. $R_I = R(\theta = 0, h = \frac{5}{2}l)$

On trouve facilement :

$$R_I = 6mg$$

8. $v_A = v_P(\theta = \pi, h = h_m)$

En utilisant l'expression de la vitesse déterminée en 1), on obtient :

$$v_A = \sqrt{gl}$$

9. A partir du point A , le point matériel est en chute libre avec les conditions initiales suivantes :
à $t = 0$, $y_i = 2l$, $x_i = L$ et $\vec{v}_i = v_A \vec{e}_x$.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point matériel : $m\vec{a}(P) = \vec{P}$.

On obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \\ \dot{x} = -v_A \\ \dot{y} = -gt \\ x(t) = -v_A t + L \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2l \end{cases}$$

Déterminons l'équation de la trajectoire.

$t = \frac{L-x}{v_A}$, en remplaçant dans l'expression $y(t)$, on obtient :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \frac{(L-x)^2}{v_A^2} + 2l$$

soit

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{(L-x)^2}{l} + 2l$$

Le point matériel repasse par l'axe Ox lorsque $y(x_0) = 0$. La résolution de cette équation donne :

$$x_0 = L - 2l$$

Problème 3 – Le pendule conique

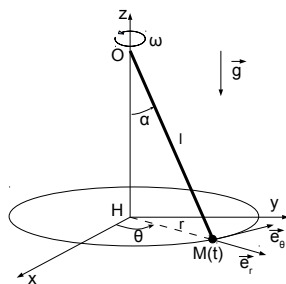


FIGURE 9 – Pendule conique

1. Montrons que la force centrifuge \vec{f}_e dérive d'une énergie potentielle.

$$\delta W(\vec{f}_e) = \vec{f}_e \cdot d\vec{l} = m\omega^2 r \cdot dr = -d\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + K\right) = -dE_{p_e}(r)$$

Donc la force centrifuge \vec{f}_e est conservative et dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{p_e}(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + K$$

2. Les seules forces travaillant, \vec{P} et \vec{f}_e sont conservatives (la tension du fil est orthogonale à la trajectoire quelque qu'elle soit si $l = \text{cste}$) donc le système est conservatif. Son énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = E_{p_e} + E_{p_p}$$

$$E_p = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + K$$

avec $r = l \sin \alpha$ et $z = -l \cos \alpha$:

$$E_p = -mgl \cos \alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2 \alpha + K$$

avec $E_{p_0} = -mgl$ et $\omega_0 = \frac{g}{l}$:

$$E_p(\alpha) = E_{p_0} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sin^2 \alpha \right)$$

3. Sur la figure 10 est représenté cette énergie potentielle pour différentes valeurs des paramètres du problème.

Figure (a) : $\alpha = 0$ est une position d'équilibre stable, $\alpha = \pi$ est une position d'équilibre instable.

Figure (b) : $\theta = 0$ est une position d'équilibre instable, $\alpha = \pi$ est une position d'équilibre instable. Il existe deux positions d'équilibre stables symétriques différentes de 0 (ici environ 70°)

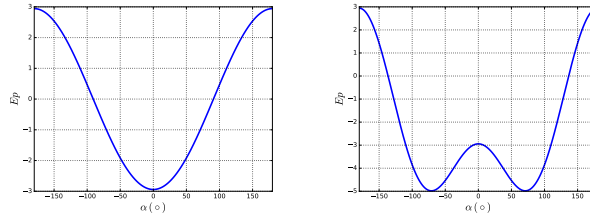
A paramètres l, g, m fixés soit à pulsation ω_0 fixé, quand ω augmente, les positions d'équilibre changent (lieu, stabilité).

On se replace dans le cas général pour la suite.

4. Existence de positions d'équilibre suivant la valeur de ω .

Les positions d'équilibre vérifient :

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \right) = 0$$



(a) $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $l = 30 \text{ cm}$, $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$ (b) $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $l = 30 \text{ cm}$, $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$

FIGURE 10 – Energie potentielle

$$\Leftrightarrow Ep_0 \left(-\sin \alpha + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times 2 \cos \alpha \sin \alpha \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -Ep_0 \sin \alpha \left(-1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times \cos \alpha \right) = 0$$

Les solutions sont :

— dans tous les cas :

$$\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0[\pi]}$$

— si $\omega > \omega_0$:

$$\cos \alpha = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \arccos \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}$$

5. Stabilité de ces positions suivant la valeur de ω .

Calculons la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\cos \alpha + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos \alpha \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\cos \alpha + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (2 \cos^2 \alpha - 1) \right)}$$

— $\alpha = 0$:

$$\left(\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} \right) = -Ep_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

— si $\omega < \omega_0$, $\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} > 0$: la position d'équilibre est stable.

— si $\omega > \omega_0$, $\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} < 0$: la position d'équilibre est instable.

— $\alpha = \pi$:

$$\left(\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} \right) = -Ep_0 \left(-1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) < 0$$

Cette position d'équilibre est toujours instable.

— $\alpha = \arccos \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ (avec $\omega > \omega_0$) :

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\cos \alpha + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos(2\alpha) \right)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\cos \alpha + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (2 \cos^2 \alpha - 1) \right)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (2 \frac{\omega_0^4}{\omega^4} - 1) \right)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

Comme $\omega > \omega_0$, $\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} > 0$: la position d'équilibre est stable.

6. Initialement la tige est verticale. Lorsqu'on met en rotation la tige autour de la verticale, elle demeure verticale tant que $\omega < \omega_0$: $\alpha = 0$ est une position d'équilibre stable. Lorsque $\omega > \omega_0$, cette position devient instable, la tige s'en écarte et se positionne en $\alpha = \arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$. A partir de $\omega = \omega_0$, lorsque ω croît, la position d'équilibre croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ (cas limite où $\omega \rightarrow \infty$). Physiquement, il y a compétition entre le poids de la tige qui tend à l'aligner avec la verticale et la force centrifuge qui tend à l'aligner avec l'horizontale.
7. On suppose $\omega > \omega_0$ et on note α_{eq} la position d'équilibre stable du système. Au voisinage de α_{eq} , on peut écrire l'énergie potentielle à l'ordre 2 en $\alpha - \alpha_{eq}$:

$$Ep(\alpha) = Ep(\alpha_{eq}) + \left(\frac{\partial Ep}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_{eq}} (\alpha - \alpha_{eq}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_{eq}} (\alpha - \alpha_{eq})^2 + o((\alpha - \alpha_{eq})^2)$$

Par choix d'origine des potentiels, on peut prendre : $Ep(\alpha_{eq}) = 0$. Par définition $\left(\frac{\partial Ep}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_{eq}} = 0$. On

a vu que $\left(\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_{eq}} = -Ep_0 \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ d'où :

$$Ep(\alpha) \approx -\frac{1}{2} Ep_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) (\alpha - \alpha_{eq})^2$$

On reconnaît l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique : $Ep = \frac{1}{2} m \Omega^2 l^2 (\alpha - \alpha_{eq})^2$ avec :

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}$$

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}$$