Devoir Surveillé 8 – Physique-Chimie

D.Malka – MPSI 2017-2018 – Lycée Saint-Exupéry

13.04.2018

Durée de l'épreuve : 3h00

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'énoncé de ce devoir comporte 6 pages.

— *Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.*
— *Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.*
— *La numérotation des exercices doit être respectée. Les résultats doivent être systématiquement encadrés.*
— *Les pages doivent être numérotées de la façon suivante : n °page courante/nombre total de pages.*

Problème 1 – Une pile au lithium

De nombreux appareils embarqués portables fonctionnent avec des piles au lithium. Elles peuvent être de forme bouton ou cylindriques. Nous cherchons à comprendre l'intérêt du choix du lithium dans leur conception.

1. **Le lithium et ses propriétés**

   1.1 *L'élément lithium*
   L'isotope le plus abondant $(92,5\%)$ sur terre est ${}^{7}_{3}Li$.

   1.1.1 Donner la composition d'un atome de lithium et donner un ordre de grandeur de la masse molaire atomique du lithium.

   1.1.2 Donner sa configuration électronique.

   1.1.3 Quel ion stable peut-il former ? Justifier.

   1.1.4 A quelle famille le lithium appartient-il ? Est-il réducteur ou oxydant ?

   1.2 *Structure cristalline*
   À une température ordinaire, le lithium cristallise dans un système cubique centré (fig.1) de paramètre de maille $a = 0{,}35$ nm.
   Déterminer la masse volumique du lithium.

2. **Structure du chlorure de thionyle**
   On donne les numéros atomiques suivants : $Z(O) = 8$; $Z(Cl) = 17$; $Z(S) = 16$.

   Proposer une formule de Lewis pour le chlorure de thionyle $SOCl_2$; l'atome de soufre étant central et hypervalent.

3. **La pile au lithium**
   Une modélisation simple d'une pile au lithium est proposée ici. Une des électrodes est constituée de lithium $Li(s)/Li^+$, l'autre est une électrode mettant en jeu le couple $SOCl_2/SO_2$ et qui joue en même temps le rôle d'électrolyte.

   3.1 Représenter schématiquement de la pile en précisant bien la nature de chaque électrode et la polarité de la pile, le sens du courant et le sens de déplacement des électrons.

   3.2 *Électrode de lithium*
   À 25°C, on donne $\dfrac{RT}{\mathcal{F}}\ln 10 \approx 0{,}06$ V et $E^\circ(Li^+/Li) = -3{,}03$ V.

   Exprimer le potentiel de cette électrode noté E_{Li} en présence d'ions Li^+ et faire l'application numérique pour une concentration $[Li^+] = 0,01\,mol.L^{-1}$.

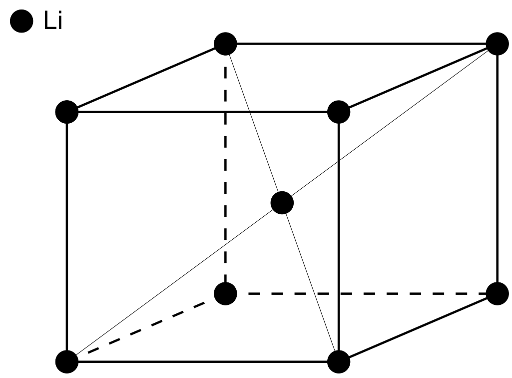

FIGURE 1 – Réseau cubique centré

3.3 *Électrode liquide au chlorure de thionyle ($SOCl_2$)*

Elle est constituée d'une électrode de carbone poreux remplie de chlorure de thionyle. Ce dernier est à la fois le solvant et l'électrolyte. La demi-équation est :

$$2SOCl_2 + 4e^- = S + SO_2 + 4Cl^-$$

Déterminer les nombres d'oxydation des différents éléments dans les 4 composés de la demi-équation précédente sachant que l'élément chlore ne change pas de nombre d'oxydation.

Une mesure du potentiel d'oxydoréduction donne $E = 0{,}65$ V par rapport l'électrode standard à hydrogène.

3.4 *Bilan de la pile*

3.4.1 Écrire l'équation bilan qui traduit le fonctionnement de cette pile. Calculer la constante d'équilibre de la réaction en prenant $E^0(SOCl_2/S) \sim E$. Commenter.

3.4.2 Exprimer la f.é.m de cette pile en fonction de E et E_{Li}. La calculer numériquement. Que pensez-vous de la valeur trouvée par rapport aux valeurs connues pour une pile alcaline classique ?

3.4.3 Sachant que la capacité de la pile vaut $225\,mA.h$ et en supposant que le lithium métallique est en défaut, déterminer la masse de l'électrode de lithium dans la pile.

3.5 Le lithium réagissant vivement avec l'eau et le chlorure de thionyle présentant également des risques, quel conseil peut-on donner à un utilisateur ayant une pile usagée ?

Problème 2 – Quantification de l'orbite cyclotron des électrons dans un semi-conducteur

Le modèle classique de l'atome d'hydrogène décrit la trajectoire de l'électron autour du proton comme une orbite périodique elliptique. En 1913 Bohr introduit un modèle de l'atome d'hydrogène restreignant les orbites possibles a une classe d'orbites stables satisfaisant une condition de quantification. Ce modèle permit d'expliquer le spectre d'émission discret de l'atome d'hydrogène.

De la même manière, nous nous intéressons à un modèle simplifié du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique. Nous commençons par décrire classiquement la trajectoire puis quantiquement. Par analogie avec le modèle de Bohr, nous étudions alors comment quantifier les trajectoires cyclotron périodiques d'une charge dans un champ magnétique.

Données :
— *charge élémentaire* $e = 1,6.10^{-19}\,C$,
— *masse de l'électron* $m = 9,0.10^{-31}\,kg$,
— *constante de Planck* $h = 2\pi\hbar = 6,63.10^{-34}\,J.s$,
— *constante de Boltzmann :* $k_B = 1,38.10^{-23}\,J.K^{-1}$,
— *célérité de la lumière dans le vide :* $c \approx 3,0.10^{8}\,m.s^{-1}$.

1. **Orbites cyclotron classiques**

1.1 On considère un électron de charge $-e$, de masse m et de vitesse $\vec{v}$ soumis à un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Donner l'expression de la force exercée par le champ magnétique sur l'électron.

1.2 On admet que pour une vitesse initiale $v_0\vec{u}_x$ ($v_0 > 0$) orthogonal au champ $\overrightarrow{B} = B\vec{u}_z$ (avec $B > 0$) la trajectoire est circulaire de rayon R et de centre $C(0, R)$. Recopier et compléter la figure 2 en indiquant au point P les coordonnées polaires r et θ, les vecteurs de la base polaire $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, la vitesse ainsi que la force exercée par le champ magnétique.

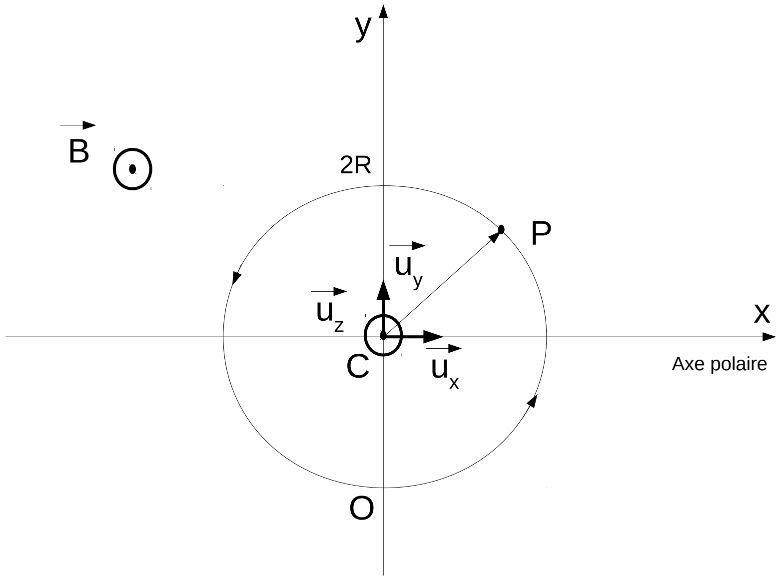

FIGURE 2 – Trajectoire de l'électron dans le champ magnétique $\vec{B}$

L'électron est émis au point O. Justifiez que le cercle est décrit dans le demi-plan $y \geq 0$ et parcouru dans le sens trigonométrique.

1.3 Montrer que la norme de la vitesse est constante au cours du mouvement.

1.4 Montrer que l'accélération $\vec{a}$ de l'électron s'écrit :

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$$

1.5 Déterminer le rayon R de la trajectoire et la fréquence du mouvement, dite *fréquence cyclotron*, $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$ en fonction des paramètres du problème. Calculer f_c pour $B = 1\,T$.

2. **Quantification du mouvement cyclotron**

La physique quantique impose une quantification du mouvement de la particule. Un grand nombre d'effets quantiques peuvent être compris en conservant la notion de trajectoires classiques, pourvu qu'elles soient soumises à une règle de quantification de Bohr-Sommerfeld. La règle de quantification fait intervenir la longueur d'onde de de Broglie λ_B du système. L'impulsion du système {champ magnétique + électron} est définie comme la somme de la quantité de mouvement de l'électron et de la quantité de mouvement g_{em} associée au champ magnétique. Pour un électron dans un champ uniforme, on peut ainsi écrire :

$$\vec{p} = m\vec{v} - eB\frac{R}{2}\vec{u}_\theta$$

La règle de quantification de Bohr-Sommerfeld relie la circonférence de l'orbite cyclotron à la longueur d'onde de de Broglie par la relation :

$$2\pi R_n = (n+\gamma)\lambda_B \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad 0 \leq \gamma < 1$$

2.1 Redonner l'expression de la longueur d'onde de de Broglie λ_B en fonction de p et h.

2.2 Montrer que le rayon R_n de l'orbite est donné par :

$$R_n = \sqrt{2(n+\gamma)}\,l_B$$

où l_B est une longueur définie à partir de $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, e et B dont on donnera l'expression.

2.3 Montrer que l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ de la particule sur la trajectoire de rayon R_n vaut

$$\mathcal{E}_n = (n+\gamma)\hbar\omega_c$$

Commenter.

2.4 Montrer que l'on peut former une température T_0 a l'aide des constantes ω_c, $\hbar$ et k_B. Calculer T_0 pour $B = 1\,T$.

2.5 A une température $T \ll T_0$, à faible densité, les électrons décrivent alors uniquement des orbites de plus basse énergie ($n = 0$). On envoie un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 96\mu m$ sur le semi-conducteur contenant les électrons et plongé dans un champ magnétique dont on peut varier l'intensité. On obtient les courbes fig.3.

2.5.1 Commenter et interpréter le graphe de gauche.

2.5.2 Montrer que pour comprendre le graphe de droite, il faut supposé que, dans le semi-conducteur, tout se passe comme si les électrons étaient doués d'une masse effective $m*$ dont on déterminera la valeur numérique.

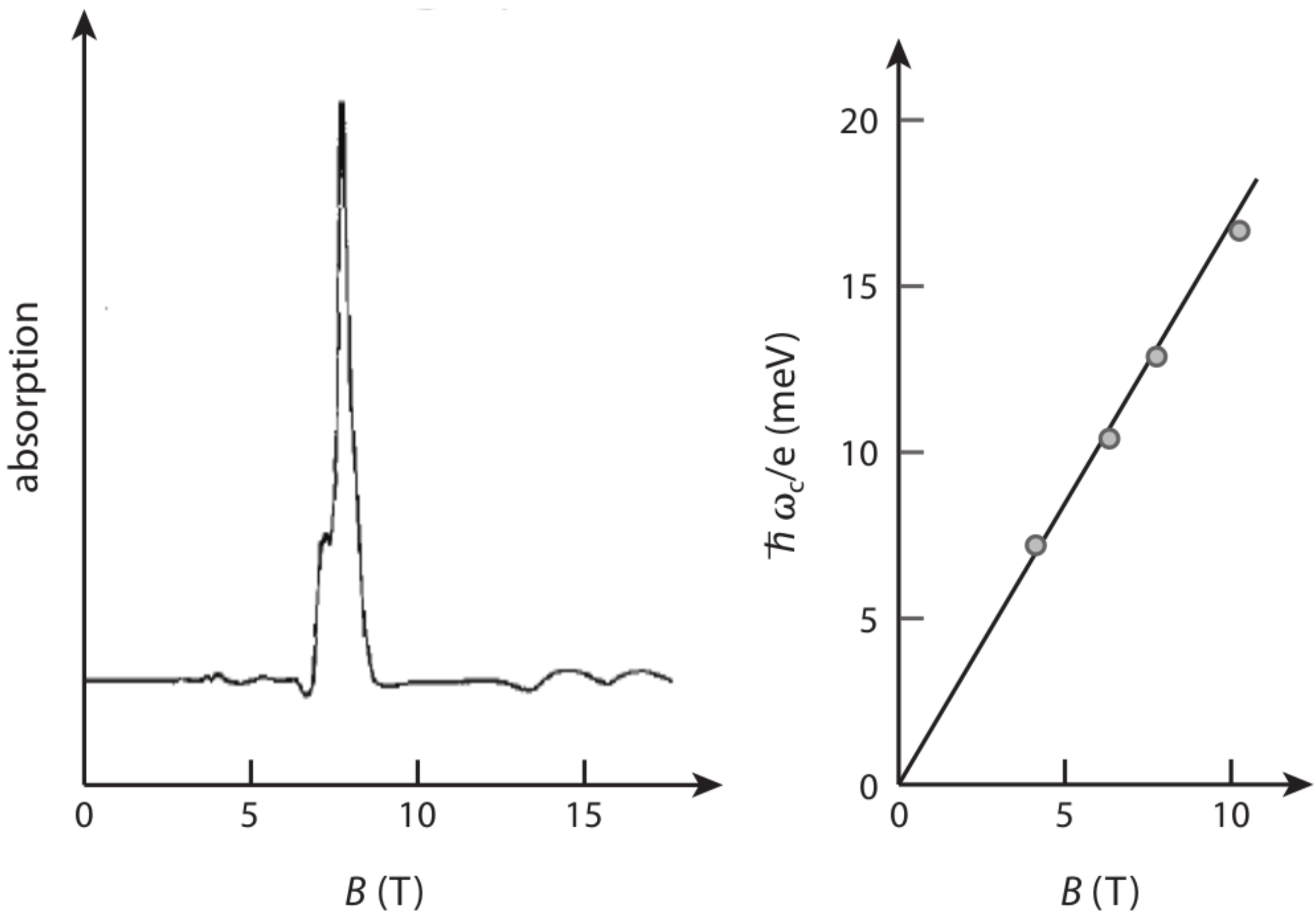

FIGURE 3 – Réponse du semi-conducteur, plongé dans une champ magnétique uniforme et stationnaire, à un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 96\mu m$.

Problème 3 – Les bases de la RMN

La résonance magnétique nucléaire est fondée sur la réponse des moments magnétiques des noyaux d'hydrogène à un champ magnétique. Ce problème aborde les prémices de ce phénomène.

Données :
— perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$.

1. **Génération du champ magnétique.** On considère une bobine de longueur $L = 1\,\mathrm{m}$, de rayon $R = 1\,\mathrm{m}$ et constituée de $N = 1000$ spires.
   1.1 A partir du spectre fig.4, caractériser le champ magnétique engendré au centre de la bobine.
   1.2 En approchant l'intensité du champ magnétique par la formule $B_0 = \dfrac{\mu_0 N i}{L}$, calculer l'intensité électrique nécessaire pour engendrer un champ magnétique de $12\,\mathrm{T}$.
   1.3 Expliquer alors pourquoi on utilise une bobine supraconductrice de résistance électrique nulle.
2. **Précession de Larmor**. Le noyau d'hydrogène (soit le proton) est doué d'un moment dipolaire magnétique magnétique noté $\vec{\mu}$. On explore l'effet d'un champ magnétique statique sur le moment dans le cadre de la physique classique. Dans cette question, le champ magnétique s'écrit $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ et on se place dans la base cartésienne liée au référentiel du laboratoire dans laquelle le moment magnétique s'écrit $\vec{\mu}\begin{pmatrix}\mu_x\\ \mu_y\\ \mu_z\end{pmatrix}$ (fig.5).
   2.1 Donner un exemple de dipôle magnétique macroscopique. Exprimer et représenter son moment dipolaire.
   2.2 Donner l'expression du couple subi par un moment dipolaire magnétique plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$.

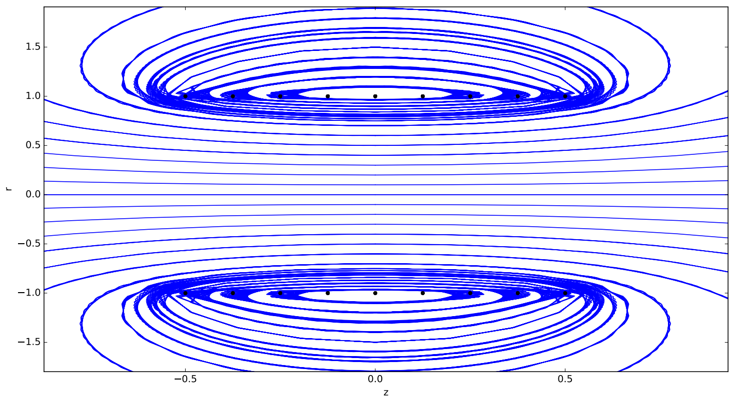

FIGURE 4 – Spectre du champ magnétique engendré par la bobine

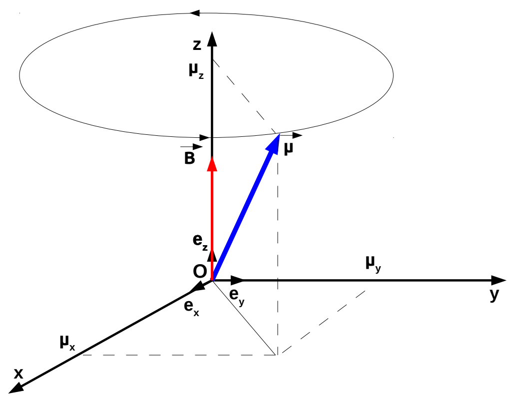

FIGURE 5 – Moment magnétique plongé dans un champ magnétique

2.3 On admet que le moment cinétique $\vec{J}$ du proton est lié à son moment magnétique par la relation : $\vec{\mu} = \gamma\vec{J}$ où γ est une constante appelée rapport gyromagnétique. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{\mu}$ et déterminer la pulsation caractéristique du mouvement de $\vec{\mu}$.

2.4 Démontrer que la norme de $\vec{\mu}$ se conserve.

2.5 Démontrer que la composante μ_z de $\vec{\mu}$ selon $\vec{e}_z$ se conserve.

2.6 Écrire et résoudre alors le système d'équations vérifié par μ_x et μ_y. Quelle est la nature du mouvement de $\vec{\mu}$ par rapport à la direction du champ magnétique $\vec{B}$?

3. **Relaxation du moment magnétique**. On rappelle que l'énergie magnétique du proton s'écrit $E_m = -\mu.\vec{B}$. A l'équilibre, quelles sont la direction et le sens de $\vec{\mu}$? Justifier.