$\boxed{\text{Faux}}$ = FAUX ! ⊠ = VRAI :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

   (a) $\boxed{\text{Faux}}$: $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < u_0$.

   (b) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_2 = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \neq \dfrac{2}{\sqrt{2^2+1}}$.

   (c) ⊠ $(u_n)_n$ est strictement positive (récurrence) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{u_n^2+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

   (d) ⊠ $u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2}{u_n^2+1} \Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}^2} = 1 + \dfrac{1}{u_n^2}$ donc $\left(\dfrac{1}{u_n^2}\right)$ est arithmétique de raison 1 donc $\dfrac{1}{u_n^2} = n + \dfrac{1}{u_0^2} = n+1 \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   $u_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ avec $\dfrac{1}{0!} = 1$ et $\forall k \geqslant 1$, $\quad \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{1\times 2\times 3\times\cdots\times k} \leqslant \dfrac{1}{1\times 2\times 2\times\cdots\times 2} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

   (a) ⊠ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$.

   (b) $\boxed{\text{Faux}}$: $u_0 = 1 < 2$.

   (c) ⊠ $u_n \leqslant \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{2^{1-1}} + \dfrac{1}{2^{2-1}} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant 3$.

   (d) $\boxed{\text{Faux}}$ (cf. c)).

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$ et $u_0 = 2$, $\quad u_1 = \dfrac{3}{2}$, $\quad u_2 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$,

   (a) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{3}{2}$.

   (b) $\boxed{\text{Faux}}$. D'après la question c, elle est périodique (valeurs 2, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{3}$).

   (c) ⊠ $u_{n+3} = 1 - \dfrac{1}{u_{n+2}} = 1 - \dfrac{1}{1-\frac{1}{u_{n+1}}} = 1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = 1 - \dfrac{1-\frac{1}{u_n}}{-\frac{1}{u_n}} = 1 + (u_n - 1) = u_n$.

   (d) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_3 = u_0 = 2 > u_2 = \dfrac{1}{3}$

4. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence : $2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0$.

   (a) ⊠ $2\left(a + b\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}\right) - 3\left(a + b\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \left(a + b\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n b\left(2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\dfrac{1}{2}\right) + 1\right) = 0$.

   (b) ⊠ d'après a.

   (c) $\boxed{\text{Faux}}$ $2\left(a + b2^{n+2}\right) - 3\left(a + b2^{n+1}\right) + \left(a + b2^n\right) = 2^n b\left(2\times 2^2 - 3\times 2 + 1\right) = 3b2^n \neq 0$ si $b \neq 0$.

   (d) $\boxed{\text{Faux}}$ d'après b.

5. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence : $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ avec $v_0 = 1$.

   (a) $\boxed{\text{Faux}}$ $v_1 = 2$, $\quad v_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} < v_1$.

(b) $\boxed{\text{Faux}}$ $v_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} > v_2$.

(c) ☒Comme aucune autre réponse ne convient et qu'il y a au moins une bonne réponse, c'est la bonne réponse :-) (pour les contestataires, si on pose $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alors $L = 1 + \frac{1}{L}$. On pose $u_n = |v_n - L|$ alors $0 \leqslant u_{n+1} = \left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L - v_n}{Lv_n}\right| = \frac{|u_n|}{Lv_n} \leqslant \frac{u_n}{L}$ (car $v_n \geqslant 1$) donc (récurrence) $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_0}{L^n}$. Comme $L > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_0}{L^n} = 0$ donc $u_n \to 0$).

(d) $\boxed{\text{Faux}}$. Si $(v_n)_n$ converge vers L alors $L = 1 + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = L + 1 \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0$. $\Delta = 5$ donc $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ et comme la suite est clairement positive alors $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618... \neq 1 + \frac{\pi}{5} = 1.6283...$

6. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$. On pose $L = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)^2$.

(a) ☒ On pose $v_n = |u_n - L|$. Comme $1+\sqrt{L} = L$, on a $v_{n+1} = \left|\left(1+\sqrt{u_n}\right) - \left(1+\sqrt{L}\right)\right| = \left|\sqrt{u_n} - \sqrt{L}\right| = \frac{|u_n - L|}{\sqrt{u_n} + \sqrt{L}} \leqslant \frac{|u_n - L|}{\sqrt{L}} = \frac{v_n}{\sqrt{L}}$ alors (récurrence) $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{v_0}{\left(\sqrt{L}\right)^n} \to 0$ (car $\sqrt{L} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$).

(b) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_0 = 0 < L$ et $u_1 = 1 > u_0$.

(c) ☒ $1 + \sqrt{L} = 1 + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $L = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{L}$ alors $u_n = L$ (récurrence).

(d) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_0 = 100 > L$ et $u_1 = 11 < u_0$.

7. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - 1 \text{ pour } n \geqslant 0 \text{ et } v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} u_k \text{ pour } n \geqslant 1.$$

(a) $\boxed{\text{Faux}}$: comme $u_n \leqslant \frac{3}{2}n$, on a $v_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{2}k \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{2}n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{3}{2}n\right)n = \frac{3}{2}$ donc v_n ne peut tendre vers $+\infty$.

(b) ☒ $\forall n \geqslant 1,\quad u_n \leqslant 1 + \frac{3}{2}n - 1 = \frac{3}{2}n$ donc $v_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{2}k = \frac{3}{2n^2}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(c) ☒ $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3} - 1\right) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3^{n+1}} \geqslant \frac{3}{2} - \frac{2}{3} > 0$

$v_n = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n}k - \sum_{k=0}^{n}1\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{3}{2}.\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{3}{2n^2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} \to \frac{3}{4}$

(d) $\boxed{\text{Faux}}$ car u_n est croissante (cf.c).

8. Le $23^{\text{ième}}$ terme de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 25$ et de raison 10 est :
a) $\boxed{\text{Faux}}$ b) $\boxed{\text{Faux}}$ c) ☒ d) $\boxed{\text{Faux}}$. $u_n = u_0 + nr = 25 + 10n \Rightarrow u_{23} = 255$.

9. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et $u_{19} \times u_{20} \times u_{21} = 729$ alors
a) $\boxed{\text{Faux}}$ b) ☒ $u_{20} = 9$ c) $\boxed{\text{Faux}}$ d) $\boxed{\text{Faux}}$
Si q est la raison alors $u_{20} = qu_{19} \Leftrightarrow u_{19} = \frac{u_{20}}{q}$ et $u_{21} = qu_{20}$ donc $729 = u_{19}u_{20}u_{21} = \frac{u_{20}}{q}u_{20}\left(qu_{20}\right) = \left(u_{20}\right)^3$ donc $u_{20} = 9$ est le seul possible ($\sqrt[3]{729} = 9$).

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(a) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$, est croissante et positive.

(b) $\boxed{\text{Faux}}$ $f(x) = \sin(2\pi x)$ n'est pas croissante alors que $u_n = f(n) = 0$ est croissante (en cas de réfractaire $f(x) = \cos(2\pi x)\, e^x$ non monotone et $u_n = e^n$ est croissante).

(c) $\boxed{\text{Faux}}$: $u_n = -n$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{n} > 1$ et $(u_n)_n$ est décroissante.

(d) ☒ Vraie ($u_{n+1} \geqslant u_n$ et $v_{n+1} \geqslant v_n$ alors $u_{n+1} + v_{n+1} \geqslant u_n + v_n$)

11. Choisir, parmi les propositions suivantes, celle(s) qui semble(nt) correcte(s) :

(a) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$ sans être monotone.(u_{2n} décroit alors que u_{2n+1} croit)

(b) ☒ $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2000 = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 1000) = 2.\dfrac{1000(1000+1)}{2} = 1001000$.

(c) $\boxed{\text{Faux}}$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$ sans être monotone à partir de tout rang (u_{2n} décroit alors que u_{2n+1} croit)

(d) ☒ $u_{n+1} - u_n = n$ n'est pas constante donc $(u_n)_n$ n'est pas arithmétique.

12. a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, tels que leur somme vaut 99.

(a) $\boxed{\text{Faux}}$ $a = 66$ et $b = -33$. alors $r = b - a = -99$ donc $c = b + r = -132$ et $a + b + c = 66 - 33 - 132 \neq 99$.

(b) $\boxed{\text{Faux}}$ $a = 33$ et $c = 66$ alors $2r = c - a = 33 \Rightarrow r = \dfrac{33}{2}$ et $b = a + r = 33 + \dfrac{33}{2}$ alors $a + b + c \neq 99$.

(c) ☒ $a = 132$ et $c = -66$. $2r = c - a = -66 - 132 \Rightarrow r = -99 \Rightarrow b = a + r = 33, \quad a + b + c = 99$

(d) $b = 66$ et $c = 132$. $\quad r = c - b = 66 \Rightarrow a = b - r = 0 \Rightarrow a + b + c = 198 \neq 99$

13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On désigne par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite. Sachant que $u_{15} = 92$ et $S_{15} = 750$ alors :

(a) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_5 = 32$ et $S_{10} = 350$. En remarquant que $u_4 = u_5 - r$ et $u_6 = u_5 + r$ donc $2u_5 = u_4 + u_6$, de même $2u_5 = u_3 + u_7 = u_2 + u_8 = u_1 + u_9$, on en déduit que $S_{10} = 2u_5 + 2u_5 + 2u_5 + u_5 = 9u_5 = 288 \neq 350$. On peut aussi remarquer que $u_{15} - u_5 = 10r \Leftrightarrow r = 6$ puis calculer besogneusement les différents termes de la suite.

(b) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_5 = 62$ et $S_{10} = 350$. En remarquant que $u_4 = u_5 - r$ et $u_6 = u_5 + r$ donc $2u_5 = u_4 + u_6$, de même $2u_5 = u_3 + u_7 = u_2 + u_8 = u_1 + u_9$, on en déduit que $S_{10} = 2u_5 + 2u_5 + 2u_5 + u_5 = 9u_5 = 558 \neq 350$. On peut aussi remarquer que $u_{15} - u_5 = 10r \Leftrightarrow r = 3$ puis calculer besogneusement les différents termes de la suite.

(c) ☒ $u_{10} = 62$ et $S_5 = 100$. $u_{15} - u_{10} = 5r \Leftrightarrow r = 6, \quad u_1 = u_{15} - 14r = 8, \quad u_2 = 14, \quad u_3 = 20, \quad u_4 = 26, \quad u_5 = 32, \Rightarrow S_5 = 100$

(d) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_{10} = 32$ et $S_5 = 100$. $u_{15} - u_{10} = 5r \Leftrightarrow r = 12, \quad u_5 = u_{15} - 10r = -32$ donc $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant u_4 \leqslant u_5 < 0 \Rightarrow S_5 < 0$ absurde.

14. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite définies par :

$$u_n = \frac{2n}{n + \sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{1}{n} \text{ pour } n \geqslant 1.$$

(a) ☒ $u_n = \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}} \to 2$ et $u_n v_n = \dfrac{2}{n + \sqrt{n}} \to 0$.

(b) $\boxed{\text{Faux}}$ $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{2n^2}{n + \sqrt{n}} = \dfrac{2n}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}} \to +\infty$.

(c) $\boxed{\text{Faux}}$ $u_n v_n = \dfrac{2}{n + \sqrt{n}} \to 0$

(d) ☒ $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{2n^2}{n + \sqrt{n}} = \dfrac{2n}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}} \to +\infty$ et $v_n \to 0$.