PrepaMantes

Tutorat CPGE-TS

Lycée St-éxupéry

Mercredi 14-01-15

Autour de la dérivée n-ième

1 Quelques rappels sur la dérivée

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un point de I. On dit que f est dérivable sur I lorsque la pente de f en a admet une limite l en tout point a de I :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l = f'(a)$$

On peut également formuler cette limite de la manière suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l = f'(a)$$

On appelle alors fonction dérivée de f la fonction f'.

1.2 Questions

- Démontrer que la dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
- Démontrer que la dérivée de $f_n(x) = x^n$ est $f_n'(x) = n\ x^{n-1}$, pour tout entier n.

1.3 Application graphique

- Rappeler l'expression de la tangente à la courbe $f(x)$ au point x_0.
- Tracer la courbe de la fonction sinus à l'aide d'une calculatrice graphique, ou à main levée sur une feuille.
- Tracer ensuite ses tangentes en $x = 0$ et en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

2 La dérivée seconde

2.1 Définition

Si la fonction f' est-elle même dérivable sur I, on note f'' la fonction dérivée de f', ce que l'on peut écrire :

$$f'' = (f')'$$

La fonction f'' est appelée « fonction dérivée seconde de f ».

On peut résumer cette définition par la phrase suivante : « La dérivée seconde, c'est la dérivée de la dérivée ».

2.2 Questions

- Montrer que l'expression de la dérivée seconde de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.
- Quelle est l'expression de la dérivée seconde des fonction sinus et cosinus ?
- Démontrer que la dérivée seconde de $f(x) = x^n$ est $f''(x) = n(n-1)\ x^{n-2}$, pour tout entier $n \geq 1$.

3 La dérivée n-ième

3.1 Définition

Par extension de la dérivée seconde, on peut définir la dérivée troisième de f, c'est à dire la dérivée de la dérivée seconde. On note à partir de maintenant $f^{(2)} = f''$ la dérivée seconde et $f^{(3)}$ la dérivée troisième, on a alors :

$$f^{(3)} = (f^{(2)})'$$

On peut alors définir la dérivée quatrième $f^{(4)} = (f^{(3)})'$, puis la dérivée cinquième, etc.

On note alors $f^{(n)}$ la dérivée "n-ième" de f. Celle-ci est obtenue en dérivant successivement n fois la fonction f

3.2 Questions

- Calculer les dérivées successives de $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 4$. Quand peut-on s'arrêter de calculer ?

- Démontrer que la dérivée n-ième de $f(x) = \frac{1}{x}$ s'écrit $f^{(n)}(x) = (-1)^n\ n!\ \frac{1}{x^{n+1}}$, où $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$, pour tout entier $n \leq 1$.

4 Une application de la dérivée n-ième

4.1 La formule de Taylor

Le théorème de Taylor appelé aussi la formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1715, montre qu'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point peut être approximée par une fonction polynôme $P_n(x)$ dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées successives de la fonction en ce point.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Où : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$, et $R_n(x)$ est un terme appelé "reste" dont la valeur reste proche de zéro lorsque x est suffisamment proche de a (une formulation rigoureuse de cette propriété est au programme des classes préparatoires MP).

On peut écrire ce résultat sous la forme :

$$\text{Pour } x \approx a : \qquad f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad ; \quad \text{avec : } 0! = 1! = 1, \text{ et } f^{(0)} = f, \text{ et } f^{(1)} = f'.$$

4.2 utilisation de la formule de Taylor à l'ordre 1

Quelle est l'expression $P_n(x)$ lorsque que l'on se limite aux termes $k = 0$ et $k = 1$?
A quelle droite particulière correspond cette expression ?

4.3 Approximation du sinus autour de x=0

On se place dans le cas ou $f(x) = sin(x)$ et $a = 0$.
Calculer $P_1(x)$, $P_3(x)$, et $P_5(x)$.
Tracer à l'aide d'une calculatrice graphique ces trois polynômes ainsi que la fonction sinus.

Réponses :

$P_1(x) = x$

$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$