L'objectif de ce texte est de montrer comment des idées fort anciennes se combinent merveilleusement à des idées du Moyen-Age et à des idées modernes :

- la trigonométrie ayant débuté il y a près de 4 000 ans ;
- les ordinateurs ou calculatrices du 20-ième siècle ;
- les algorithmes (c'est à dire une suite finie et non-ambigüe d'instructions permettant de donner la réponse à un problème) initiés au 9-ième siècle Al Khuwarizmi (latinisé au Moyen Âge en Algoritmi).

Nous serons alors en mesure de calculer numériquement le sinus et le cosinus de tout réel et de justifier que :

$$\pi \approx 3{,}141592654$$

Partie I. La trigonométrie antique.

1. A l'aide de la trigonométrie et d'un triangle isocèle rectangle, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

2. A l'aide de la trigonométrie et d'un triangle équilatéral, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comment peut-on visualiser $\cos(x)$ et $\sin(x)$ à l'aide d'un cercle ? En déduire

(a) les valeurs de $\cos(0)$, $\sin(0)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

(b) l'expression uniquement en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ des ré els suivants :

$$\cos(x+2\pi), \quad \sin(x+2\pi), \quad \cos(-x), \quad \sin(-x)$$
$$\cos(\pi-x), \quad \sin(\pi-x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Partie II. Deux algorithmes

1. Uniquement à l'aide de la partie **I** et sans calculatrice, compl éter le tableau suivant

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\sin(x)$									
$\cos(x)$									
x	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	$-71\pi/3$	$71\pi/6$
$\sin(x)$									
$\cos(x)$									

2. Soit x un réel. Proposer un algorithme REDUCTION_COS (respectivement REDUCTION_SIN) qui ramène le calcul de $\cos(x)$ (respectivement $\sin(x)$) au calcul du cosinus ou du sinus d'un réel appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Partie III. Calcul numérique de sin et cos

On considère les fonctions f, P et Q définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}, \quad \mathrm{P}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \mathrm{Q}(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ et $f^{(5)}(x)$.

2. Dresser alors les tableaux de variations sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de $f^{(4)}$, $f^{(3)}$, f'', f' et f en précisant à chaque fois la valeur de la fonction en 0.
3. En déduire pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que : $(\mathcal{A}) : 0 \leqslant \sin(x) - \mathrm{Q}(x) \leqslant \frac{x^5}{120}, \quad 0 \leqslant \cos(x) - \mathrm{P}(x) \leqslant \frac{x^4}{24}$.
4. A l'aide de votre calculatrice, calculer $\mathrm{Q}(0{,}1)$ et $\sin(0{,}1)$ puis $\mathrm{P}(0{,}1)$ et $\cos(0{,}1)$.
   Quelle erreur commet-on en approximant
   — $\sin(0{,}1)$ par $\mathrm{Q}(0{,}1)$?
   — $\cos(0{,}1)$ par $\mathrm{P}(0{,}1)$?
   Est-ce compatible avec l'encadrement $(\mathcal{A})$?
5. Dans le même repère et à l'aide de votre calculatrice, tracer le graphe de sin et Q. On choisira de visualiser uniquement l'intervalle [0,1] pour l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées Faire de même avec cos et P. Que constate-t-on ?
6. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Justifier que
   — $\mathrm{Q}(x)$ est une approximation de $\sin(x)$ à $0,003$ près ;
   — $\mathrm{P}(x)$ est une approximation de $\cos(x)$ à $0,02$ près.

Partie IV. Algorithmes de calcul de cos et sin

Soit x un réel. Rappelons que : $\mathrm{P}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad \mathrm{Q}(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

1. Ecrire un algorithme CALCUL_P calculant $\mathrm{P}(x)$.
2. Ecrire un algorithme CALCUL_Q calculant $\mathrm{Q}(x)$.
3. Calculer $\cos(2015)$ et $\sin(2014)$ en utilisant les algorithmes REDUCTION_COS, REDUCTION_SIN, CALCUL_P, CALCUL_Q et votre calculatrice .... sans appuyer les touches cos et sin :-)
4. Calculer $\cos(2015)$ et $\sin(2014)$ en utilisant les touches cos et sin de votre calculatrice. Comparer les résultats obtenus.
5. Á l'aide des 4 algorithmes déjà créés, écrire deux algorithmes CALCUL_SIN (respectivement CALCUL_COS) fournissant une approximation numé rique de $\sin(x)$ (respectivement de $\cos(x)$).

Partie V. A la recherche de π

On considère les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \\ v_0 = 1, \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n}{u_{n+1}} \end{cases}$

On rappelle que pour tout réel x, on a : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1, \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

1. A l'aide de votre calculatrice et en utilisant une précision à 10^{-9}, calculer les dix premières valeurs de u_n (c'est à dire. $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$) ainsi que celles de v (c'est à dire. $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$).
2. Quelle conjecture peut-on émettre ? Calculer $2v_n$ (pour $n = 1, 2, \ldots, 10$). Peut-on améliorer la conjecture ?
3. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
4. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \quad$ et $\quad v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
5. Qu'en déduit-on sur la suite $(u_n)_n$?
6. A l'aide de la partie **II**, justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \pi - v_n \leqslant \frac{1}{6} * \frac{\pi^3}{4^n}$.
7. Comment choisir N pour que v_{N} soit une approximation de π à 10^{-9} ? Avec votre calculatrice, calculer v_{N}.