Tutorat CPGE-TS

CPGE – Lycée Saint-Exupéry

29.01.2015

Une histoire de distance

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle, le point B a pour coordonnées $(3; -1)$, et M est un point quelconque de la courbe $\mathcal{C}$. On notera (x, y) les coordonnées du point M.

1 Distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$

On admet que la distance BM admet un minimum quand M décrit la courbe $\mathcal{C}$. Ce minimum est appelé *distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$*. C'est cette distance que nous cherchons dans cette partie.

1.1 Conjectures

1. A l'aide du logiciel `Geogebra`, réaliser un figure dynamique correspondant à la situation. Par gain de temps, on pourra éventuellement utiliser la figure à cette adresse :

   `http://www.geogebratube.org/student/m80538`
2. Faire une conjecture sur la position du point M_0 pour laquelle la distance BM semble minimale.
   On appelle M_0 ce point.
3. Tracer la tangente d à la courbe $\mathcal{C}$ en M_0. Faire alors une autre conjecture.

1.2 Valeur exacte de la distance de B à $\mathcal{C}$

1. Exprimer la distance BM en fonction de l'abscisse de M.
2. Proposer une méthode permettant à la fois de déterminer le point M_0 et la distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Mettre en oeuvre la méthode et en déduire une équation vérifiée par l'abscisse x_0 de M_0. Résoudre numériquement cette équation. En déduire les coordonnées de M_0 et la distance BM_0. On conservera cinq chiffres significatifs sur les résultats numériques.

2 Distance du point B à un point quelconque de la courbe $\mathcal{C}$

La simulation sur `Geogebra` laisse penser qu'il existe un point M_1 d'abscisse comprise entre 1 et 2 de $\mathcal{C}$ tel que $BM_1 = 5$.

1. Montrer qu'un tel point M_1 existe effectivement.
2. Pour déterminer l'abscisse du point M_1 tel que $BM_1 \approx 5$ à ε près, on propose l'algorithme 1.

   2.1 Comment fonctionne cet algorithme ?

   2.2 Faire « tourner à la main » l'algorithme. Donner alors la valeur approchée de x_1. Estimer l'erreur commise sur x_1.
3. Utiliser l'algorithme implémenté en langage Python à l'adresse :

   `http://www.mpsi-lycee-saint-exupery.fr/vie_classe/algo_dicho.php`

   pour évaluer l'abscisse x_1 de M_1 tel que $BM_1 = 5$ au millième près.

Algorithme 1 : Evaluation des coordonnées de M_1 tel que $BM_1 = 5$

$x_B = 3$
$y_B = -1$
$BM_1 = 5$

$x_{min} = 1$
$x_{max} = 2$
$\varepsilon = 0.1$
$x = \dfrac{x_{max} + x_{min}}{2}$
$BM = \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - e^x)^2}$

tant que $|BM - BM_1| > \varepsilon$ **faire**
  si $BM > BM_1$ **alors**
    $x_{max} = x$
  sinon
    `/*Dans ce cas` $BM < BM_1$`*/`
    $x_{min} = x$
  $x = \dfrac{x_{max} + x_{min}}{2}$
  $BM = \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - e^x)^2}$

$y = e^x$

retourner x, y, BM_1, $|BM - BM_1|$