Tutorat CPGE-TS

CPGE – Lycée Saint-Exupéry

28.01.2015

Une histoire de distance – Corrigé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle, le point B a pour coordonnées $(3; -1)$, et M est un point quelconque de la courbe $\mathcal{C}$. On notera (x, y) les coordonnées du point M.

1 Distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$

On admet que la distance BM admet un minimum quand M décrit la courbe $\mathcal{C}$. Ce minimum est appelé *distance du point B à la courbe $\mathcal{C}$*. C'est cette distance que nous cherchons dans cette partie.

1.1 Conjectures

1. Voir `http://www.geogebratube.org/student/m80538`.
2. L'exploitation graphique de la simulation Geogebra permet d'évaluer les coordonnées de M_0 la distance BM_0. Pour $M = M_0$:

   $$BM_0 \approx 3,57$$

   Les coordonnées (x_0, y_0) point M_0 vérifie :

   $$0,18 \leq x_0 \leq 0,25 \quad \text{avec} \quad 1,20 \leq y_0 \leq 1,29$$

3. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en M_0 semble orthogonale à la droite (BM_0).

1.2 Valeur exacte de la distance de B à $\mathcal{C}$

1. Par définition :

   $$BM = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$$

   Soit ici avec $x_B = 3$, $y_B = -1$ et, comme $M \in \mathcal{C}$, $y = e^x$:

   $$\boxed{BM = \sqrt{(x-3)^2 + (e^x + 1)^2}}$$

2. Le point M_0 est tel que BM est minimale c'est-à-dire que la dérivée première de la fonction $BM(x)$ est nulle pour $M = M_0$ et que la dérivée seconde en M_0 est positive (pour avoir bien un minimum et non un maximum).

   Il est évidente que $BM(x)$ et $f(x) = BM^2(x)$ sont minimales au même point. Pour simplifier le calcul de la dérivée, on cherche le minimum de $f(x)$.

3. Dérivée de $f(x)$ par rapport à x. ⚠ **On dérive une somme de fonctions composées** :

   $$\boxed{f'(x) = 2(x-3) + 2e^x(e^x + 1)}$$

   L'abscisse x_0 de M_0 vérifie :

   $$f'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x_0 - 3) + e^{x_0}(e^x + 1) = 0} \quad (\bigstar)$$

Il faut résoudre cette équation qui, a priori, ne présente pas de solution analytique (en tout cas à la connaissance d'un élève de TS !). On opère donc une résolution numérique approchée. En gardant cinq chiffres significatifs sur le résultats fournis par la calculatrice :

$$\boxed{x_0 \approx 0,21648} \quad \boxed{y_0 = e^{x_0} \approx 1,2417} \quad \boxed{BM_0 \approx 3,5740}$$

2 Distance du point B à un point quelconque de la courbe $\mathcal{C}$

La simulation sur `Geogebra` laisse penser qu'il existe un point M_1 d'abscisse comprise entre 1 et 2 de $\mathcal{C}$ tel que $BM_1 = 5$.

1. Montrons qu'il existe point M_1 de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x \in [1, 2]$ tel que $BM = 5$.
   - en $x = 1$, $BM(x) = \sqrt{(1-3)^2 + (e^1 + 1)^2} = 4,222...$;
   - en $x = 2$, $BM(x) = \sqrt{(2-3)^2 + (e^2 + 1)^2} = 8,448...$;
   - La fonction qui a x associe $BM(x)$ est continue sur $[1, 2]$.

   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, sur $[1, 2]$, $BM(x)$ prend toutes les valeurs comprises entre 4.222... et 8.448. En particulier, il existe une abscisse x_1 pour laquelle $BM(x_1) = BM_1 = 5$.
2. Pour déterminer l'abscisse du point M_1 tel que $BM_1 \approx 5$ à ε près, on propose l'algorithme 1.

Algorithme 1 : Evaluation des coordonnées de M_1 tel que $BM_1 = 5$

$x_B = 3$
$y_B = -1$
$BM_1 = 5$

$x_{min} = 1$
$x_{max} = 2$

$\varepsilon = 0.1$

$x = \dfrac{x_{max} + x_{min}}{2}$
$BM = \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - e^x)^2}$

tant que $|BM - BM_1| > \varepsilon$ **faire**
  si $BM > BM_1$ **alors**
    $x_{max} = x$

  sinon
    `/*Dans ce cas` $BM < BM_1$`*/`
    $x_{min} = x$
  $x = \dfrac{x_{max} + x_{min}}{2}$
  $BM = \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - e^x)^2}$

$y = e^x$

retourner x, y, BM_1, $|BM - BM_1|$

2.1 L'algorithme procède à une recherche dichotomique de la solution sur l'intervalle $I = [1; 2]$. Il consiste à évaluer $BM(x)$ au point milieu de l'intervalle $x = 1,5$. Si $BM(x) > BM_1$ alors comme $f : x \to BM(x)$ est une fonction croissante de x, la solution se trouve dans l'intervalle $[1; 1,5]$ sinon la solution est dans l'intervalle $[1,5; 2]$. On applique ensuite le même mode opératoire sur le nouvel intervalle (soit $[1; 1,5]$, soit $[1,5; 2]$) puis sur les intervalles successifs de plus en plus étroit jusqu'à trouver une valeur de la solution à ε près. Remarquons que le succès de la recherche dichotomique est ici assuré par la continuité et la monotonie de la fonction $f : x \to BM(x)$ sur $I = [1; 2]$. On peut montrer facilement que $BM(x)$ est une fonction strictement croissante sur I : sa dérivée $f'(x) = 2(x-3) + 2e^x(e^x+1)$ est croissante sur I et $f'(1) = 16 > 0$ donc $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$ et donc $f : x \to BM(x)$ est croissante sur I.

Cet algorithme est celui qu'on opère quand on recherche « intelligemment » un nombre mystère, par exemple entre 1 et 100.

2.2 Exécution de l'algorithme :

- Valeurs initiales des variables
  - $x_{min} = 1$
  - $x_{max} = 2$
  - $x = 1.5$
  - $BM = 5.6832$
  - $|BM - BM_1| = 0.68321...$
- 1ère itération de la boucle *Tant que*
  - $|BM - BM_1| = 0.68321.. > 0.1$
  - $BM > 5$
  - $x_{min} = 1$
  - $x_{max} = 1.5$
  - $x = 1.25$
  - $BM = 4.8193$
  - $|BM - BM_1| = 0.18069...$
- 2ème itération de la boucle *Tant que*
  - $|BM - BM_1| = 0.18069... > 0.1$
  - $BM < 5$
  - $x_{min} = 1.25$
  - $x_{max} = 1.5$
  - $x = 1.375$
  - $BM = 5.2147$
  - $|BM - BM_1| = 0.2147...$
- 3ème itération de la boucle *Tant que*
  - $|BM - BM_1| = 0.2147... > 0.1$
  - $BM > 5$
  - $x_{min} = 1.25$
  - $x_{max} = 1.375$
  - $x = 1.3125$
  - $BM = 5.0083....$
  - $|BM - BM_1| = 0.0083...$
- 4ème itération de la boucle *Tant que*
  - $|BM - BM_1| = 0.0083... < 0.1$: on sort de la boucle.
  - $x = 1.3125$
  - $y = 3.71545$
  - $BM = 5.00830629175$
  - $|BM - BM_1| = 0.0083...$

3. L'algorithme implémenté en langage Python à l'adresse :

   `http://www.mpsi-lycee-saint-exupery.fr/vie_classe/algo_dicho.php`

   renvoie les valeurs suivantes :

   Le point $M_1(1.3095703125, 3.70458155778)$ est tel que $BM = 4.9990639286$ soit un écart de 0.000936071402434 avec 5.0.