Tutorat CPGE-TS

CPGE – Lycée Saint-Exupéry

04.02.2015

La suite de Fibonacci (Léonard de Pise).

On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n ; \\ F_0 = F_1 = 1. \end{cases}$$

Partie I. Etude numérique de $(\mathbf{F_n})_{\mathbf{n\geqslant 0}}$.

1. Calculer les dix premiers termes de cette suite (c'est-à-dire $F_0, F_1, .., F_{10}$). Que semble faire cette suite ?
2. On pose $t_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$. A l'aide de votre calculatrice, compléter (par des valeurs approchées à 0,001 près) le tableau suivant :

t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
t_5	t_6	t_7	t_8	t_9

   Quelle conjecture peut-on faire sur la suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$?
3. Qu'affiche l'algorithme 1 ?

Algorithme 1 : que fait cet algorithme ?

```
a=1
b=1
pour k allant de 1 à 5 faire
    c=a
    a=b
    b=c+b
afficher a,b,b/a
```

☞ ***Un coup de pouce ?*** *Si vous avez du mal à comprendre l'algorithme ou si vous êtes curieux, rendez-vous sur sur* `http://www.mpsi-lycee-saint-exupery.fr/vie_classe/algo_fibo.php` *et testez l'algorithme implémenté en Python. Python est un langage de programmation informatique moderne qui est étudié en classe préparatoire scientifique.*

Partie II. Calcul de $(\mathbf{F_n})_{\mathbf{n\geqslant 0}}$ (selon la méthode inventée par Euler)

1. Montrer que l'équation $x^2 = x + 1$ admet deux solutions réelles r_1 et r_2 avec $r_1 \in]-1, 0[$ et $r_2 > 1$.
2. Que vaut $r_1 + r_2$? $r_1 r_2$? Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = (r_1 + r_2) F_{n+1} - r_1 r_2 F_n$.
3. Montrer que les suites $u_n = F_{n+1} - r_1 F_n$ et $v_n = F_{n+1} - r_2 F_n$ sont géométriques.
4. Exprimer u_n et v_n en fonction de n, r_1 et r_2.
5. Prouver que $\forall n \geqslant 0, \quad F_n = \dfrac{(r_2)^{n+1} - (r_1)^{n+1}}{r_2 - r_1}$.

☞ *La méthode s'adapte pour résoudre les équations différentielles (toujours inventée par Euler !)*

Partie III. Convergence de $(\mathbf{F_n})_{\mathbf{n \geqslant 0}}$ et de $\left(\dfrac{\mathbf{F_{n+1}}}{\mathbf{F_n}}\right)_{\mathbf{n \geqslant 0}}$.

1. Quelle est la limite de la suite $(F_n)_{n \geqslant 0}$?
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = r_2 * \dfrac{1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+2}}{1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+1}}$.
3. Prouver que la suite $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n \geqslant 0}$ converge et préciser sa limite. Ceci est-il compatible avec la conjecture émise à la partie **I** ?

☞ *Le nombre r_2 s'appelle le* Nombre d'Or *(cf. de nombreux ouvrages le concernant dont* Le nombre d'or : le langage mathématique de la beauté*, collection Le Monde présentée par Cédric Villani, médaille Fields 2010, directeur de l'Institut Henri Poincaré)*