Tutorat CPGE-TS

CPGE – Lycée Saint-Exupéry

04.02.2015

La suite de Fibonacci (Léonard de Pise).

Partie I. Etude numérique de $(F_n)_{n\geqslant 0}$.

1. $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, $F_7 = 21$, $F_8 = 34$, $F_9 = 55$, $F_{10} = 89$. Cette suite semble tendre vers $+\infty$.
2.

t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
1	2	1,5	1,666	1,6
t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
1,625	1,615	1,619	1,617	1,618

. La suite $(t_n)_{n\geqslant 0}$ semble converger vers un nombre proche de 1,618.

3. L'algorithme calcule les termes successifs de la suite de Fibonacci qui sont stockés dans les variables a et b. La variable c sert à stocker la précédente valeur de a nécessaire au calcul de la valeur suivante de b.
$\boxed{k=1}$ $c = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $\boxed{k=2}$ $c = 1$, $a = 2$, $b = 3$, $\boxed{k=3}$ $c = 2$, $a = 3$, $b = 5$
$\boxed{k=4}$ $c = 3$, $a = 5$, $b = 8$, $\boxed{k=5}$ $c = 5$, $a = 8$, $b = 13$. Il affiche 8, 13 et $\dfrac{13}{8} = 1,625$

Partie II. Calcul de $(F_n)_{n\geqslant 0}$.

1. $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 > 1$, $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618\,03 \in \left]-1, 0\right[$.
2. $r_1 + r_2 = 1$, $r_1 r_2 = -1 \Rightarrow F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = (r_1 + r_2) F_{n+1} - r_1 r_2 F_n$.
3. $u_{n+1} = F_{n+2} - r_1 F_{n+1} = (r_1 + r_2) F_{n+1} - r_1 r_2 F_n - r_1 F_{n+1} = r_2 (F_{n+1} - r_1 F_n) = r_2 u_n$. De même $v_{n+1} = r_1 v_n$.
4. $u_0 = F_1 - r_1 F_0 = 1 - r_1 = r_2$, $v_1 = F_1 - r_2 F_0 = 1 - r_2 = r_1$, $u_n = (r_2)^n u_0 = (r_2)^{n+1}$, $v_n = (r_1)^n v_0 = (r_1)^{n+1}$.
5. $u_n - v_n = (r_2 - r_1) F_n$ et $u_n - v_n = (r_2)^{n+1} - (r_1)^{n+1} \Rightarrow F_n = \dfrac{(r_2)^{n+1} - (r_1)^{n+1}}{r_2 - r_1}$.

Partie III. Convergence de $(F_n)_{n\geqslant 0}$ et de $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\geqslant 0}$.

1. $F_n = (r_2)^{n+1} - (r_1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty + 0 = +\infty$.
2. $$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{(r_2)^{n+2} - (r_1)^{n+2}}{(r_2)^{n+1} - (r_1)^{n+1}} = \frac{(r_2)^{n+2}\left[1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+2}\right]}{(r_2)^{n+1}\left[1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+1}\right]} = r_2 * \frac{1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+2}}{1 - \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+1}}$$
3. $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} \to r_1 * \dfrac{1-0}{1-0} = r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ car $\left|\dfrac{r_1}{r_2}\right| = \dfrac{|r_1|}{r_2} \underset{r_2>1}{<} r_1 < 1 \Rightarrow \dfrac{r_1}{r_2} \in \left]-1, 1\right[$.