L'ensemble des nombres réels

L'ensemble des nombres réels, usuellement noté $\mathbb{R}$, est considéré jusqu'ici comme l'ensemble des nombres admettant une écriture décimale éventuellement illimitée. En théorie, c'est un peu plus compliqué que cela mais c'est bien suffisant pour les manipulations qu'on en attend.

Le but de ce qui suit est de donnée des approches pratiques de la structuration de $\mathbb{R}$.

Les problèmes sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que l'on souhaite.

1. ***Pour ceux ayant traité l'exponentielle complexe*** : Le nombre $e^{\pi\sqrt{163}}$ (*la constante de Ramanujan*) est-il entier ? Si oui donner sa valeur.

2. Le nombre $12,594167167167167...$ est-il rationnel ? Si oui en donner une écriture fractionnaire.

3. Le *nombre de Champernowne* est un nombre dont les décimales sont constituées des entiers naturels successifs : $C = 0,123456789101112131415....$ Montrer que la suite des décimales de C comporte une infinité de fois n'importe qu'elle suite de chiffres $c_0 c_1 ... c_n$.

4. Le nombre $0,99999...$ (une infinité de fois) est le plus grand nombre de $]0;1[$. Vrai ou faux ? Justifier dans tous les cas.

5. Si x est un nombre réel quelconque, existe-t-il un nombre x' qui lui immédiatement plus grand (autrement dit un plus petit majorant) ?

6. On considère l'intervalle $I =]3,141592653589;\pi[$. Peut-on trouver dans I un nombre décimal ? Un nombre rationnel ? Un nombre irrationnel ? Le mieux est peut-être d'en expliciter un si possible dans chaque cas.

7. Peut-on numéroter tous les nombres de $]0,1[$: on suppose avoir numéroter des nombres de $]0,1[$ sous la forme $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ donc sous la forme d'une suite. On considère x un nombre qui a sa n-ième décimale différente de celle du nombre a_n (*procédé diagonal de Cantor*). x existe-t-il ? Si oui que dire de x ? Conclusion ?