Tutorat CPGE-TS

CPGE – Lycée Saint-Exupéry

11.03.2015

Marche aléatoire – Corrigé

1 Cas unidimensionnel : la marche de l'ivrogne

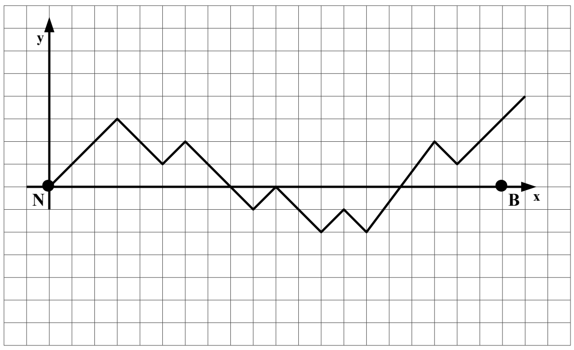


Figure 1 – De la boîte de nuit à l'arrêt de bus

1. Représenter quelques trajets possibles de l'individu pour $n = 20$.
2. n fois deux choix donc 2^n trajets possibles.
3. Comme le nombre de pas est faible, on peut raisonner aisément sur un arbre de probabilité : fig.2.

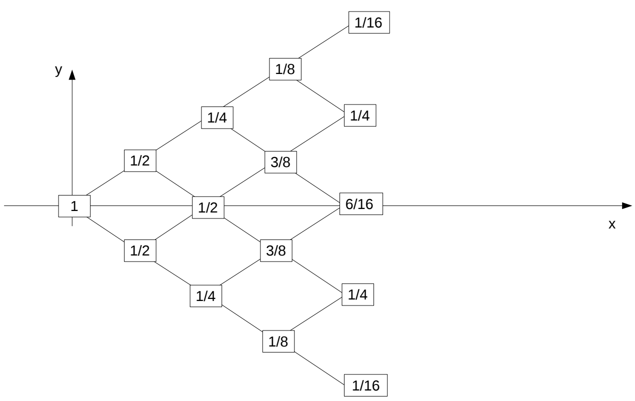


Figure 2 – Probabilités des différents points d'arrivée de l'ivrogne après 4 pas

La probabilité d'arriver à l'arrêt de bus est 6/16.

4. Loi de probabilité suivie par X
   — Soit x la variable aléatoire qui a chaque pas associe sa direction. x ne peut prendre que deux valeurs : *gauche* avec une probabilité p, ou droite *droite*, avec une probabilité $q = 1 - p$. Donc x est une épreuve de Bernouilli.

— X est construite comme une succession de n épreuves de Bernouilli indépendantes, de paramètre p, donc X suit la loi binomiale de paramètres p et n (avec ici $p = \frac{1}{2}$).

5. Soit $\mathcal{P}$ la probabilité que la personne rejoigne l'arrêt de bus.
Il est évident que la personne rejoint l'arrêt de bus si et seulement si, au cours du trajet, elle fait autant de pas à gauche qu'à droite. En particulier, elle ne peut pas rejoindre l'arrêt de bus si n est impair !

$$\textit{Si } n \textit{ est impair, } \mathcal{P} = 0$$

On sait que pour la loi binomiale :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

Si n est pair la probabilité de rejoindre l'arrêt de bus est donc la probabilité de faire $k = \frac{n}{2}$ pas à gauche parmi n. De plus, ici, $p = \frac{1}{2}$ donc :

$$\textit{Si } n \textit{ est pair, } \mathcal{P} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2} \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad \begin{pmatrix} n \\ \frac{n}{2} \end{pmatrix} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2}$$

Pour $n = 20$, $\mathcal{P} = 0,176$.

6. Que montre la distribution ?

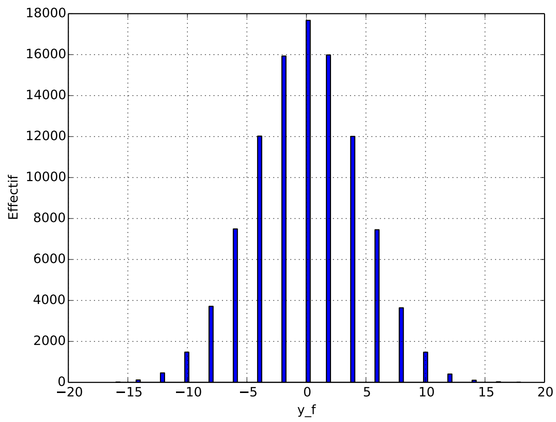


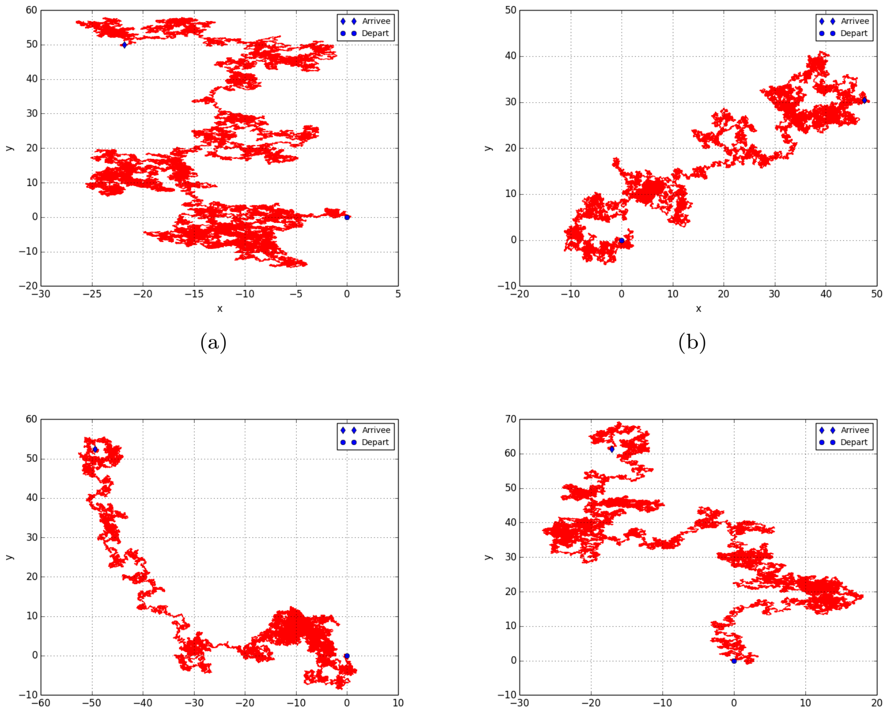
FIGURE 3 – Distribution de l'ordonnée y_f du point d'arrivée pour $p = \frac{1}{2}$ et $n = 20$ sur 100 000 simulations.

— Les ordonnées accessibles sont paires (1).
— Conformément à la loi des grand nombres, les fréquences d'apparitions des résultats tendent vers les probabilités. Ainsi la fréquence d'arrivée à l'ordonnée 0 (arrêt de bus) est légèrement inférieure à $\frac{18\,000}{10^5} = 0,18$. On a calculé la probabilité $0,176$ à la question précédente.
— La moyenne de l'ordonnée d'arrivée semble valoir 0. On peut conjecture que l'espérance de la variable X vaut $E(X) = 0$ (2).
— La forme de l'histogramme évoque une distribution normale (pour les variables continues).

Démonstrations :
— Montrons (1) : l'ordonnée d'arrivée vaut, en unité arbitraire, $y_f = g - d$ où d est le nombre de pas effectués vers la droite et g le nombre de pas effectués vers la gauche. Or $g + d = n$ d'où : $y_f = 2g - n$. Or par hypothèse n est pair donc y_f est pair. *Que se passe-il si n est impair ?*
— Montrons (2) : $E(X) = nE(x) = n.p = \frac{n}{2}$. Or $y_f = n - 2g = n - 2X$ donc $E(y_f) = E(n - 2X) = n - 2E(X) = 0$.

2 Cas bidimensionnel : le mouvement brownien

Le mouvement brownien est le mouvement qu'on peut observer d'une petite particule déposé à la surface d'un fluide, historiquement un grain de Pollen dans l'eau. Les résultats de simulation de mouvement brownien sont représentés fig.4. Ce mouvement résulte des collisions de la particule avec les molécules du fluide. On peut le modéliser, en première approche, par une marche aléatoire bidimensionnelle.



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 4 – Simulations de mouvements browniens

1. La figure 4d fait penser à de la fumée. La trajectoire d'une particule de fumée est la superposition d'un mouvement brownien et d'un mouvement d'ensemble ascendant (convection).
2. On propose un algorithme où la particule ne peut se déplacer que suivant les diagonales.

Algorithme 1 : Génération de la trajectoire d'une particule suivant une marche aléatoire bidimensionnelle

```
x=[x0] y=[y0] /*dx, dy déplacements élémentaires suivant Ox et Oy*/
pour i de 0 à N-1 faire
    /*alea(0,1) renvoie aléatoirement un réel compris entre 0 et 1 suivant la loi
      uniforme.*/
    si alea(0,1)<1/2 alors
        Ajouter x[i] + dx
    sinon
        Ajouter x[i] - dx
    si alea(0,1)<1/2 alors
        Ajouter y[i] + dy
    sinon
        Ajouter y[i] - dy
retourner x,y
```